



**BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL**

CFD-SIMULATIONEN ZUR ERMITTLUNG AERODYNAMISCHER KRAFTBEIWERTE

Master-Thesis

LuFG Baumechanik und numerische Methoden

LuFG Computersimulation für Brandschutz und Fußgängerverkehr

FB D - Abteilung Bauingenieurwesen

Bergische Universität Wuppertal

Betreuer:

Dipl.-Ing. Sebastian Roesler

Dr. rer.-nat. Lukas Arnold

eingereicht von

Erik Andresen

Wuppertal, im Oktober 2014

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle meinen Eltern für die umfangreiche Korrektur und Überarbeitung von Diagrammen, Formeln und Text dieser Arbeit danken. Ich danke ebenfalls meinen Freunden, die sich (teilweise trotz eigener Abschlussarbeiten) ebenfalls an der Überarbeitung dieser Thesis beteiligt haben. Weiterhin bedanke ich mich bei meinem Betreuer Dr. Lukas Arnold für die Betreuung und das Wissen über die Benutzung des Supercomputers JUROPA bzw. des Betriebssystems LINUX und über ein Großteil der mathematischen und physikalischen Hintergründe dieser Thesis. Mein Dank gilt meinem Betreuer Sebastian Roesler, der mir neben der Betreuung die Ergebnisse der Windkanalversuche bereitstellte und Hilfe beim Aufbau von Programmen, die zur Erstellung der Diagramme dieser Arbeit beigetragen haben, leistete.

Kurzfassung

In dieser Thesis werden Möglichkeiten untersucht, aerodynamische Beiwerte von Brücken oder brückenähnlichen Körpern durch numerische Strömungssimulationen zu bestimmen. Zur Analyse dieser Möglichkeiten werden Simulationen von Strömungen um einen Rechteckquerschnitt mit dem Verhältnis von Breite zu Höhe von 1:8 und um einen Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brücke mit Hilfe der Software OPENFOAM erstellt. Weiterhin wird das Verhalten der virtuellen Strömung bei Neigung der Körper gegenüber der Horizontalen studiert. Zur Modellierung der turbulenten Strukturen der Strömung werden sowohl RANS- als auch LES-Modelle verwendet.

Die resultierenden aerodynamischen Beiwerte der Modellierungen werden mit Wasser- bzw. Windkanalversuchen verglichen und Qualitäten, Grenzen sowie Probleme der Modellierungen herausgearbeitet. Die für die numerische Simulation notwendigen physikalischen und mathematischen Hintergründe werden dargestellt und erläutert.

Im Gegensatz zum RANS-Modell reproduziert das LES-Modell die aerodynamischen Beiwerte der Strömungen im Experiment um die nicht geneigten Körper mit geringen Abweichungen. Bei Neigung der betrachteten Körper unterscheiden sich die in LES-Simulation und Experiment bestimmten Beiwerte teilweise erheblich. Das lässt darauf schließen, dass auch das LES-Modell Phänomene bei der Strömung um geneigte brückenähnliche Körper nicht in ausreichendem Maße wiedergeben kann.

Abstract

In this thesis the possibilities to determine aerodynamical coefficients of bridge-like bodies by using numerical simulations are investigated. For this purpose numerical simulations of flows around a rectangular cylinder with a width to height ratio of 8:1 and around a model of the Tacoma-Narrows-Bridge (1940) have been carried out. The simulations were built up with the use of the software OPENFOAM. Additionally, the behaviour of flows around the bodies inclined in reference to the horizontal axis are explored. For the sake of modelling the turbulence in the flows each a RANS- and a LES-modell are used.

Regarding the aerodynamical coefficients the simulations were compared to experimental data inter alia measured in wind tunnel tests. Concerning the reproduction of the coefficients the limits and possibilities of the models are described.

Further more the physical and mathematical background of the numerical simulations is shown.

The comparison of the simulations and experiments indicates the missing quality of the RANS-model concerning the reproduction of the aerodynamical coefficients. The coefficients of the LES-simulation agree approximately with the experimental data regarding simulations of flows around considered bodies which are not inclined. However, while comparing the results of flows around inclined bodies unacceptable weaknesses of the LES-model are discovered.

Variablenverzeichnis

Variable	Definition	Einheit
a	Beschleunigung	$\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$
A_{ref}	Bezugsfläche eines Körpers in einer Strömung	m^2
a_x	Beschleunigung in x-Richtung	$\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl	dimensionslos
c_l	Auftriebskoeffizient	dimensionslos
c_m	Momentenkoeffizient	dimensionslos
C_μ	Modellparameter (k - ϵ -Modell)	dimensionslos
C_s	Smagorinsky-Konstante	dimensionslos
c_d	Widerstandskoeffizient	dimensionslos
D	Zylinderdurchmesser	m
Δt	Zeitschrittweite	s
D_x	Resultierende horizontale Kraft an einem umströmten Körper	N
$\Delta x'$	Filterweite	m
E	Energie	J
ϵ	Dissipationsrate	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$
f_w	Ablösefrequenz der Wirbel	Hz

Variable	Definition	Einheit
k	Turbulente kinetische Energie	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$
L_k	Kolmogorov-Länge	m
l_{ref}	Bezugslänge eines Körpers in einer Strömung	m
L_z	Resultierende vertikale Kraft an einem umströmten Körper	N
M	Mach-Zahl	dimensionslos
m	Masse	kg
μ	Dynamische Viskosität	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
μ_t	Turbulente Viskosität	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
M_α	Resultierendes Moment um den Schwerp. eines umstr. Körpers	Nm
ν	Kinematische Viskosität	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
ν_{sgs}	Wirbelviskosität (LES)	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
p	Druck	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$
ϕ	Strömungsgröße	verschiedene
p'	Druckkorrektor	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$
q	Staudruck	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$
R	Rand eines Gebiets	m^2
ρ	Dichte des Fluids	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Re	Reynolds-Zahl	dimensionslos

Variable	Definition	Einheit
S	Strouhal-Zahl	dimensionslos
T	Temperatur eines Fluids	K
τ	Schubspannung	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ_{xx}	Normalspannung am Kontrollvolumen	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ_{xy}	Schubspannung am Kontrollvolumen	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ_{xz}	Schubspannung am Kontrollvolumen	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ_{Re}	Reynolds-Spannung	$\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$
τ_{sgs}	Feinstrukturspannungen	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
T_w	Periode einer Wirbelablösung	s
\vec{u}	Geschwindigkeit der Strömung	m/s
u_∞	Geschwindigkeit der Strömung am Einlass	m/s
u^+	Normierte Strömungsgeschwindigkeit	dimensionslos
u_s	Schallgeschwindigkeit in der Luft	m/s
\vec{u}_w	Wirbelgeschwindigkeit	m/s
V	Volumen	m^3
y^+	Normierter Wandabstand	dimensionslos

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Kurzfassung	iii
Abstract	v
Variablenverzeichnis	vii
Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xix
I Einführung	1
1 Einleitung	3
1.1 Was sind Strömungen bzw. Fluide?	3
1.2 Was ist numerische Strömungsmechanik?	3
1.3 Ziel dieser Thesis	5
II Physikalische bzw. mathematische Beschreibung von Strömungen	7
2 Fluide und ihre Eigenschaften	9
2.1 Allgemeines	9
2.2 Einphasen- Mehrphasenströmungen	9
2.3 Inkompressible - kompressible Strömungen	9
2.4 Strömungen von newtonschen - nichtnewtonschen Fluiden	10
2.5 Isotherme - nicht isotherme Strömungen	11
2.6 Laminare - turbulente Strömungen	11
2.7 Reaktive - nicht reaktive Strömungen	13
3 Physikalische und mathematische Beschreibung von Strömungen	15
3.1 Massenerhaltung	15
3.2 Impulserhaltung	17
3.3 Randbedingungen	20

4	Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen	23
4.1	Analytische Lösung	23
4.2	Numerische Lösung	23
4.2.1	Allgemeines	23
4.2.2	Numerische Gitter	24
4.2.3	Diskretisierungsmethoden	26
5	Finite-Volumen-Methode (FVM)	29
5.1	Allgemeines	29
5.2	Anwendung der FVM auf Diff.-gleichung 1. Ordnung	30
5.3	Anwendung der FVM auf Diff.-gleichung 2. Ordnung	33
5.4	Randbedingungen bei Verwendung der FVM	33
6	Lösung algebraischer Gleichungssysteme	35
6.1	Vorüberlegung	35
6.2	Direkte Methoden	35
6.3	Iterative Methoden	35
6.3.1	Das Gauss-Seidel-Verfahren (GSV)	35
6.3.2	Mehrgitter-Methoden (Multigrid-Methods (MG))	36
7	Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung	39
7.1	Allgemeines	39
7.2	Die Eulerverfahren und weitere 2-Ebenen-Methoden	39
7.2.1	Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL-Bedingung)	41
7.3	Prädiktor-Korrektor-Methoden (PKM)	41
7.4	Runge-Kutta-Methoden (RKM)	41
8	Die SIMPLE-Methode	43
9	Turbulente Strömungen	45
9.1	Allgemeines	45
9.2	Möglichkeiten zur Modellierung von turbulenten Strömungen	48
9.3	DNS	48
9.4	RANS	48
9.4.1	Die Boussinesq-Hypothese	51
9.4.2	Das k - ϵ -Modell	52
9.4.3	Turbulenz im Wandbereich	52
9.4.4	Wandfunktionen	53
9.4.5	Reynoldsspannungsmodelle	55
9.5	LES	55
9.5.1	Das Smagorinsky-Lilly-Modell	58

III Einführung in OpenFOAM / Benchmark	61
10 OpenFOAM	63
10.1 Allgemeines	63
10.2 Relevante Werkzeuge	63
10.2.1 Pre-Processing	63
10.2.2 Processing	63
10.2.3 Post-Processing	64
11 Benchmark: Die Karmannsche Wirbelstraße	65
11.1 Umströmung des Kreiszylinders mit <i>OpenFOAM</i> (Re=100)	67
11.1.1 Geometrie des Szenarios und Netzgenerierung	68
11.1.2 Simulationsergebnisse	70
11.1.3 Kraftkoeffizienten	71
IV Turbulente Umströmung von Körpern mit Hilfe von OpenFOAM	73
12 Umströmung von Rechteckquerschnitten bei hohen Reynoldszahlen	75
12.1 Vorüberlegung	75
12.2 Geometrie des Szenarios und Netzgenerierung	76
12.3 Simulationsergebnisse der RANS-Simulationen	79
12.4 Ergebnisse der LES-Simulationen	82
12.5 Vergleich der Resultate	82
12.6 Umströmung eines geneigten Rechtecks	82
12.6.1 Simulationsergebnisse	85
12.6.2 Vergleich der Beiwerte	88
13 Umströmung der Tacoma-Narrows-Brigde	91
13.1 Messung im Windkanal der Ruhr-Universität-Bochum	91
13.1.1 Aufbau und Durchführung der Versuche	91
13.2 Numerische Modellierung der Strömung um den Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde	94
13.2.1 Geometrie und Randbedingungen	94
13.2.2 Simulationsergebnisse	97
13.3 Numerische Modellierung der Strömung um den geneigten Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde	99
13.3.1 Simulationsergebnisse	100
13.4 Vergleich von Windkanalversuch und numerischer Modellierung	102

V	Schlussbetrachtungen	105
14	Fazit und Ausblick	107
14.1	Fazit	107
14.2	Ausblick	108
	Literaturverzeichnis	111
VI	Anhang	115
A	Kraftkoeffizienten der numerischen Modellierung	117
A.1	Umströmung eines Rechtecks mit dem Verhältnis von Breite zu Höhe von 8:1	117
A.2	Umströmung der Tacoma-Narrows-Bridge	117
B	OpenFOAM-Inputdateien	123
B.1	Benchmark - Laminare Umströmung eines Kreiszyinders	123
B.2	Umströmung des Rechtecks und der Tacoma-Narrows-Bridge	132
C	Das im Windkanal eingesetzte Modell der Tacoma-Narrows-Bridge	153

Abbildungsverzeichnis

1.1	a) Verwirbelte Luft- und Wasserdampfströme des Islandtiefs. Aufgenommen am 4. September 2003 vom Aqua-Satelliten. Quelle: [35] b) Kelvin-Helmholtz-Wirbel in der Atmosphäre hinter dem Monte Duval, Australien. Quelle: [37]	4
1.2	Aerodynamische Kräfte in einem strömungsfesten Koordinatensystem. Quelle: [51]	6
2.1	Geschwindigkeitsprofil eines newtonschen Fluids. Quelle: [1]	11
2.2	Reynoldscher Farbfadenversuch. Quelle: [1]	12
3.1	Massenströme an einem Kontrollvolumen. Quelle: [5]	16
3.2	Kräfte an einem Kontrollvolumen (nur in x-Richtung). Quelle: [5]	17
3.3	Randbedingung an einer reibungsbehafteten ortsfesten Wand. Quelle: [1]	20
3.4	Mögliche Randbedingungen einer Kanalströmung. Quelle: [1]	21
4.1	Numerisches Gitter zur Berechnung einer Strömung um einen Zylinder. Quelle: [1]	23
4.2	Kartesisches äquidistantes Gitter. Quelle: [1]	25
4.3	Verschiedene strukturierte Gitterformen. Quelle: [1]	25
4.4	Unstrukturiertes Gitternetz. Quelle: [3]	26
5.1	Diskretisierung durch die FVM. Rechenpunkte befinden sich in der Mitte der Volumina.	29
5.2	Indizierung der Randsegmente. Quelle: [1]	32
5.3	Zusätzliche Zellenreihe zur Erfüllung der Randbedingungen. Quelle: [1]	34
9.1	Rohrströmung. Laminar (links) und turbulent (rechts). Quelle: [2]	45
9.2	Turbulente Strömungen. Quelle: [4], [2]	45
9.3	Geschwindigkeit eines Punktes in einer Rohrströmung bei verschiedenen Reynoldszahlen. Quelle: [4]	46
9.4	Energiespektrum von turbulenten Wirbeln. Quelle: [4]	47
9.5	Vergleich einer RANS-Simulation (links) und einer DNS-Simulation (rechts). Quelle: [4]	49
9.6	Universelles Geschwindigkeitsgesetz in einer Rohrströmung. Quelle: [1]	53
9.7	Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht. Quelle: [1]	54
9.8	Numerischer Aufwand und Qualität der drei gängigen Verfahren zur Abbildung von turbulenten Strömungen. Quelle: [17]	56
9.9	Gasjetsimulation: Vergleich von Experiment, RANS- und LES-Simulation. Quelle: [4]	56
9.10	Filterung einer Strömungsgröße in Großstruktursimulationen durch den Gauß-Filter. Quelle: [1]	57

11.1	Karmannsche Wirbelstraße hinter der Juan-Fernandez Insel (Satellitenbild). Quelle: [4] . . .	66
11.2	Einsturz der Tacoma-Narrows-Brigde im November 1940 im Bundesstaat Washington. Quelle: [36]	67
11.3	Geometrie der Kreiszyylinderumströmung. Angaben in [m].	68
11.4	Darstellung der Diskretisierung des Strömungskanals. a) Übersicht b) Detailsansicht im Bereich des Zylinders.	69
11.5	Geschwindigkeitsprofil der Kreiszyylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von 100. . . .	70
11.6	Widerstands- und Auftriebskoeffizient des Kreiszyinders (Re 100) (36980 Gitterzellen). . .	71
12.1	Geometrie und Netz der Rechteckumströmung a) Geometrie (RANS), Angaben in [m] b) Geometrie (LES), Angaben in [m] c) Übersicht (RANS-2D) d) Übersicht (LES-3D) e) Detailsansicht um das Rechteck (RANS-2D) f) Detailsansicht um das Rechteck (LES-3D).	78
12.2	Geschwindigkeitsverteilung der Strömung R 1.4 um ein Rechteck (8:1) (RANS) (t=150 Sek.) a) Übersicht über Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper	80
12.3	Kraftgrößenkoeffizienten der Rechteckumströmung R 1.4 (RANS).	81
12.4	a) Geschwindigkeitsverteilung der Strömung R 2.3 um ein Rechteck (8:1) (LES) (t=290 Sek.) a) Übersicht über den Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper	83
12.5	Kraftgrößenkoeffizienten der Rechteckumströmung R 2.3 (LES).	84
12.6	Geometrie und Netz der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) a) Seitenansicht (LES-3D) b) Detailsansicht um das Rechteck (LES-3D).	84
12.7	Kraftgrößenkoeffizienten der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) (LES).	86
12.8	Geschwindigkeitsprofil der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) a) Übersicht über den Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper	87
12.9	Kraftgrößenbeiwerte einer Umströmung eines Rechtecks unter verschiedenen Anstellwinkeln; Vergleich von Simulation und Experiment. a) Widerstandskoeffizient b) Auftriebskoeffizient c) Momentenkoeffizient.	88
13.1	Die 1940 durch eine Resonanzkatastrophe eingestürzte Tacoma-Narrows-Brigde. Quelle: [32]	92
13.2	Schematischer Aufbau des Windkanals der Ruhr-Uni-Bochum. Quelle: [51]	92
13.3	Versuchsstand zur Messung von aerodynamischen Kräften. Quelle: [31]	93
13.4	Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde. Foto: [51]/[31]	94
13.5	a) Geometrie der virtuellen Strömung um den Querschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde (RANS und LES). Angaben in [mm]. Ausdehnung des Strömungskanals senkrecht zur Zeichenebene bei der LES-3D-Simulation beträgt 300 mm. b) Virtueller Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde c)/d) Übersicht über das Gitternetz des Strömungskanals (LES) e) Detailsansicht im Bereich des Querschnitts.	96
13.6	Ausschnitt des Geschwindigkeitsprofils der Strömung im Bereich des Brückenquerschnitts. a) RANS (62735 Zellen) b) LES (892990 Zellen).	98
13.7	Zeitlicher Verlauf der Kraftgrößenkoeffizienten. a) RANS (62735 Zellen) b) LES (892990 Zellen).	99

13.8	Netz der Strömung um die geneigte Brücke a) Übersicht	
	b) Detailsansicht im Bereich der Brücke.	100
13.9	Ausschnitt des Geschwindigkeitsprofils der Strömung im Bereich des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 10° b) Neigung um 5°	101
13.10	Kraftgrößenkoeffizienten der Strömungen um die geneigte Tacoma-Narrows-Brigde a) Neigung um 10° b) Neigung um 5°	102
13.11	Vergleich der Kraftkoeffizienten der Tacoma-Narrows-Brigde.	103
A.1	Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um -10°	
	b) Neigung um -5°	117
A.2	Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um $-2,5^\circ$	
	b) Neigung um 0°	118
A.3	Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um $2,5^\circ$	
	b) Neigung um 5°	118
A.4	Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. Neigung um 10°	119
A.5	Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um -10°	
	b) Neigung um $-7,5^\circ$	119
A.6	Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um -5°	
	b) Neigung um $-2,5^\circ$	120
A.7	Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 0°	
	b) Neigung um $2,5^\circ$	120
A.8	Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 5°	
	b) Neigung um $7,5^\circ$	121
A.9	Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. Neigung um 10°	121
C.1	Das im Windkanal eingesetzte Modell der Tacoma-Narrows-Bridge. Angaben in [mm]. Quelle: [31].	153

Tabellenverzeichnis

11.1	Randbedingungen.	68
11.2	Anfangsbedingungen des inneren Netzes.	68
11.3	Anzahl der genutzten Zellen für die Umströmung des Kreiszyinders.	69
11.4	Kraftbeiwerte und Strouhalzahlen. Vergleich mit Ergebnissen der Literatur.	72
12.1	Randbedingungen.	76
12.2	Anfangsbedingungen des inneren Netzes.	77
12.3	Anzahl der genutzten Zellen und verwendete Turbulenzmodelle für die Umströmung des Rechteckquerschnitts ($Re=10^5$).	79
12.4	Widerstandskoeffizient eines Rechtecks. Gegenüberstellung von Simulation und Ergebnissen der Literatur.	85
13.1	Randbedingungen.	95
13.2	Anfangsbedingungen des inneren Netzes.	95
13.3	Anzahl der genutzten Zellen und verwendete Turbulenzmodelle für die Umströmung des Modellquerschnitts des Tacoma-Narrows-Brigde ($Re \approx 0,5 \cdot 10^4$). Die Anzahl der Gitterzellen in z-Richtung beträgt bei den dreidimensionalen Simulationen jeweils 15.	97
13.4	Widerstandskoeffizient der Tacoma-Narrows-Bridge. Gegenüberstellung von Simulation und Windkanalversuch.	100

Teil I

Einführung

1 Einleitung

1.1 Was sind Strömungen bzw. Fluide?

In der Strömungslehre werden gasförmige, sowie flüssige Stoffe oder Stoffgemische als Fluide bezeichnet. Fluide zeichnen sich im Gegensatz zu Festkörpern dadurch aus, dass ihre Molekularstruktur einer von außen aufgetragenen Scherkräft nur geringfügigen Widerstand leistet.

D. h., sie besitzen eine endliche Zähigkeit (Viskosität). Trotz der vielen offensichtlichen Unterschiede zwischen Gasen und Flüssigkeiten bewegen sich beide nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten. Ihre Bewegung unterscheidet sich daher nur quantitativ, jedoch nicht qualitativ [3].

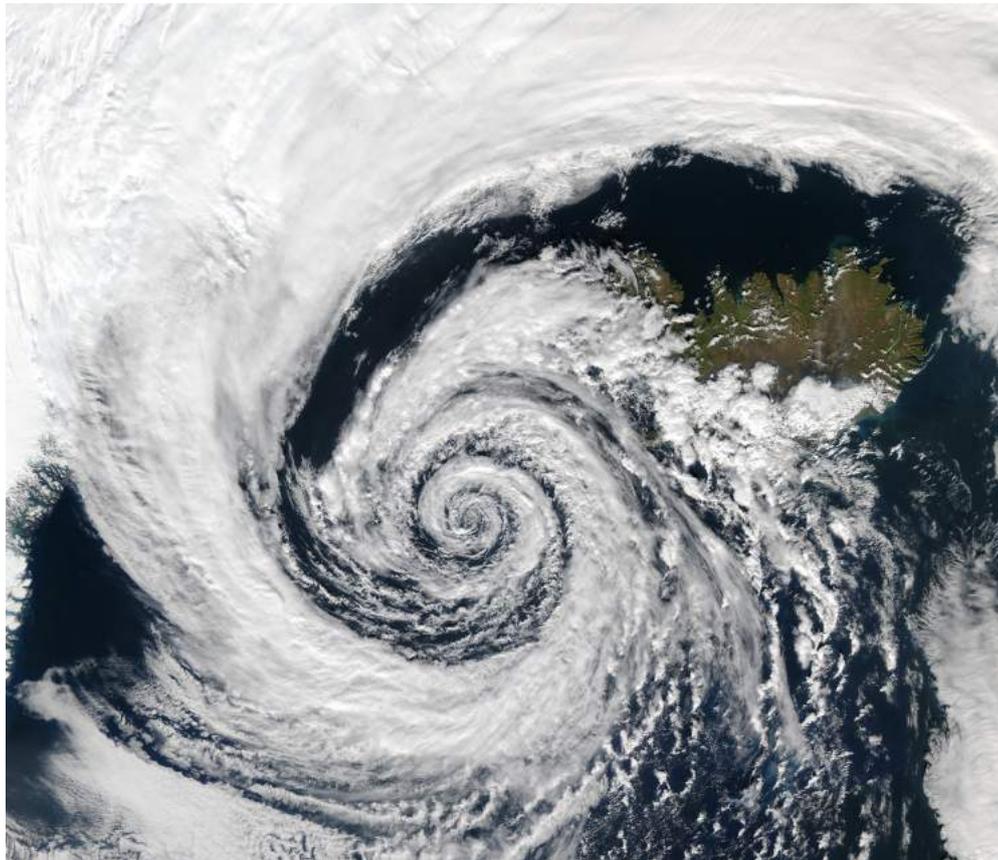
Die Bewegungen der Fluide werden Strömungen genannt. Die Ursache, die zur Entstehung von Strömungen führt, sind äußere Kräfte. Zu diesen gehören u. a. Kräfte, die durch Druckdifferenzen entstehen, Scherkräfte zwischen Fluiden oder Festkörpern und Fluiden oder die Gewichtskraft. Hinsichtlich der Kräfte differenziert man zwischen Oberflächenkräften (u. a. Scherkräfte) und Volumenkräften (u. a. die Gewichtskraft) [3].

Die Eigenschaften von Strömungen (u. a. Geschwindigkeit, Druck und Temperatur) sind abhängig von der Geometrie des Strömungsfelds, den von außen angreifenden Kräften und den Eigenschaften des strömenden Fluids (u. a. Dichte und Viskosität). Dabei können die Eigenschaften der Strömung wiederum Einfluss auf die Eigenschaften der Fluide nehmen [3].

Strömungen verschiedenster Arten sind in der Natur zu beobachten. Dazu gehören Wasserströmungen von Flüssen, Bächen und Ozeanen, Strömungen von Flüssigkeiten in Rohren, beispielsweise in einem Otto-Motor, Strömungen der Blutkörper im Blutkreislauf von Lebewesen, Rauchgasströmungen infolge von Bränden und viele viele weitere. In dieser Arbeit werden natürlich entstandene Windströmungen und ihre Auswirkung auf unbewegliche, starre Körper analysiert. Diese entstehen infolge eines Druckgradienten zwischen Luftmassen hohen bzw. niedrigen Drucks [29]. Insbesondere filigrane, schlanke Bauwerke, wie z. B. weitgespannte Brücken, Schornsteine oder auch Sendemasten, verlangen eine detaillierte Untersuchung der Windströmungen, die diese beanspruchen. Die exakten Eigenschaften dieser Strömung, die Eigenschaften des strömenden Fluids, die mathematische Beschreibung der Strömung sowie die Auswirkung der Strömung auf bestimmte sich in der Strömung befindenden Körper werden in den folgenden Kapiteln erörtert.

1.2 Was ist numerische Strömungsmechanik?

Strömungsmechanik (Computational-Fluid-Dynamics / CFD) umfasst die physikalische Betrachtung von Strömungen aller Art. Dazu gehört auch ihre mathematische Beschreibung. In vielen Fällen ist die mathematische Darstellung des Verhaltens der Strömungen zwar über Differentialgleichungen möglich, die



(a)



(b)

Abbildung 1.1: a) Verwirbelte Luft- und Wasserdampfströme des Islandtiefs. Aufgenommen am 4. September 2003 vom Aqua-Satelliten. Quelle: [35] b) Kelvin-Helmholtz-Wirbel in der Atmosphäre hinter dem Monte Duval, Australien. Quelle: [37]

analytische Lösung der Gleichungen oder ggf. eines Gleichungssystems ist jedoch in der Regel unbekannt. Es existieren Möglichkeiten die Differentialgleichungen zu vereinfachen, indem bestimmte Eigenschaften (z. B. Reibung an Körpern) der Strömung vernachlässigt werden. Im Allgemeinen sind diese Vereinfachungen nicht tragbar, schließen sie doch fundamentale Phänomene der betrachteten Strömung aus [3], [1]. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Differentialgleichungen, die das Verhalten der Strömung beschreiben, numerisch zu lösen. Dazu wird eine Gleichung oder ggf. ein Gleichungssystem von Differentialgleichungen durch Anwendung von Approximationen in ein algebraisches Gleichungssystem umgeformt. Die Lösung des algebraischen Gleichungssystems bietet dann eine Approximation der Strömungsgrößen an diskreten Stellen des Strömungsfelds bzw. zu diskreten Zeitpunkten der Strömung. Das entstandene algebraische Gleichungssystem beinhaltet ein Vielzahl von Gleichungen und Unbekannten. Es ist daher praktisch nur mit Hilfe eines Rechners lösbar.

Die notwendigen Verfahren und Schritte von der Herleitung der Differentialgleichungen bis zur Lösung des algebraischen Gleichungssystems sind in den Kapiteln 3 - 7 dargestellt. Eine Alternative zur theoretischen Analyse von Strömung ist die rein experimentelle Untersuchung dieser. Experimente wurden und werden sinnvollerweise zur Erforschung von Strömungsproblemen ausgeführt. Sie beinhalten jedoch gegenüber der theoretischen Analyse gewisse Nachteile. Versuche zu bestimmten Strömungsproblemen sind nur mit großem Aufwand oder gar nicht durchführbar, da sich beispielsweise die Strömung in einem extrem kleinen Maßstab abspielt oder die Strömung durch Messgeräte nicht erreichbar ist. Weiterhin können Experimente fehlerbehaftet sein, u. a. da die Messinstrumente die Strömung beeinflussen. Auch Laborversuche bieten in den meisten Fällen nur globale Aussagen, z. B. über den Widerstand eines Körpers im Strömungsfeld. Numerische Modellierungen versprechen dagegen auch Aussagen über Details einer Strömung, z. B. ein lokales Druck- oder Geschwindigkeitsmaximum. Numerische Modellierungen sind folglich ein lohnendes Ziel, obwohl sie mit einer Vielzahl von Problemen, u. a. einem hohen Rechenaufwand, verbunden sind [3].

1.3 Ziel dieser Thesis

Die Untersuchung des aerodynamischen (und aeroelastischen) Verhaltens von schlanken Bauteilen, wie beispielsweise weitgespannten Brücken oder hohen Türmen, ist auf dem heutigen Stand fester Bestandteil der Tragwerksbemessung dieser Bauwerke. Diese Untersuchungen wurden bisher in der Regel durch Modellversuche im Windkanal ausgeführt.

Ziel der Thesis ist die Erörterung der Frage, ob und in wie fern numerische Modellierungen die aerodynamischen Beanspruchungen auf starre, unbewegliche Brücken- oder brückenähnliche Körper durch Windströmungen reproduzieren können. Um die Qualität der numerischen Simulationen einordnen zu können, werden resultierende Kräfte und Momente, die auf einen Körper infolge der Strömung wirken, untersucht.

Zur Vergleichbarkeit von Simulationen und Experimenten werden die oben genannten Kräfte und Momente üblicherweise normiert. Die durch die Normierung entstandenen dimensionslosen Größen werden Kraftgrößenkoeffizienten oder Kraftgrößenbeiwerte genannt. Zu diesen gehören der Widerstandskoeffizient c_d , der Auftriebskoeffizient c_l und der Momentenkoeffizient c_m . Diese werden wie folgt bestimmt [3], [51], [31], [49], [29].

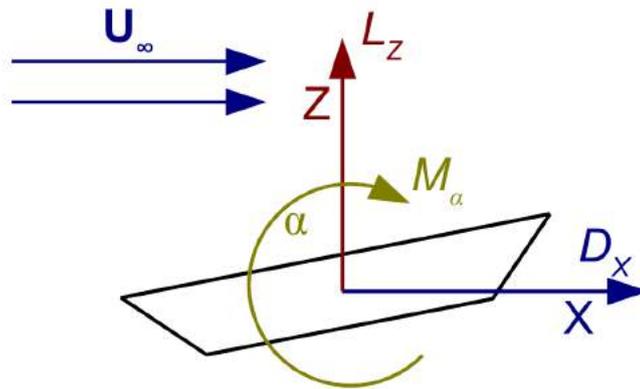


Abbildung 1.2: Aerodynamische Kräfte in einem strömungsfesten Koordinatensystem. Quelle: [51]

Infolge der Strömung erfährt der umströmte Querschnitt Normal- und Schubspannungen an den Grenzen zwischen Körper und Strömung. Integriert man die Spannungen über die der Strömung ausgesetzten Fläche des Körpers, erhält man eine resultierende Kraft und ihre Wirkungsrichtung. Diese lässt sich bei ebener Betrachtung (s. Abb. 1.2) der Strömung in eine horizontale¹ Komponente D_x und in eine vertikale Komponente L_z teilen. Integriert man das Produkt aus Spannung und Hebelarm der Spannung (Abstand vom Schwerpunkt des Körpers), erhält man das resultierende Moment M_α um die (ebene) Schwerpunktsachse des Körpers.

Die Normierung der Kräfte erfolgt durch Division dieser durch das Produkt von Staudruck²

$$q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \quad (1.1)$$

und einer Bezugsfläche A_{ref} . Zur Normierung des Momentes wird eine zusätzliche Division durch eine Bezugslänge l_{ref} vorgenommen. Die Definitionen der Kraftgrößenbeiwerte lauten folglich

$$c_d = \frac{D_x}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref}}, \quad (1.2)$$

$$c_l = \frac{L_z}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref}}, \quad (1.3)$$

$$c_m = \frac{M_\alpha}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot A_{ref} \cdot l_{ref}}. \quad (1.4)$$

Bisher wurden die Kraftgrößenbeiwerte durch Modellversuche im Windkanal bestimmt. Da diese Versuche jedoch aufwändig und kostenintensiv sind, werden in dieser Thesis die Möglichkeiten analysiert, die Kraftgrößenbeiwerte mit Hilfe einer numerischen Simulation zu berechnen. Dazu werden verschiedene Modellierungsmöglichkeiten erörtert und ihre Qualitäten bzw. Grenzen dargestellt.

¹Die Kräfte werden in dieser Thesis ausnahmslos in Bezug auf ein strömungsfestes Koordinatensystem berechnet

² u_∞ ist die noch nicht durch den Körper beeinflusste Strömungsgeschwindigkeit. ρ bezeichnet die Dichte des strömenden Fluids

Teil II

Physikalische bzw. mathematische Beschreibung von Strömungen

2 Fluide und ihre Eigenschaften

2.1 Allgemeines

Bevor mathematische und physikalische Hintergründe erörtert werden, gilt es zu klären, um welche Art von Strömung es sich bei Windumströmungen von Bauwerken handelt und welche Fluide hier strömen. In Abhängigkeit von der Art der Strömung müssen die klassischen Erhaltungsgleichungen (Kontinuitätsgleichung, Impulsgleichungen) (s. Kap. 3), die eine Strömung beschreiben, erweitert werden oder können vereinfacht werden. Bei Strömungen wird hauptsächlich unterschieden zwischen [1]:

1. Einphasenströmungen - Mehrphasenströmungen
2. Inkompressible - kompressible Strömungen
3. Strömungen von newtonschen - nichtnewtonschen Fluiden
4. Isotherme - nicht isotherme Strömungen
5. Laminare - turbulente Strömungen
6. Reaktive - nicht reaktive Strömungen

2.2 Einphasen- Mehrphasenströmungen

Das in dieser Arbeit ausschließlich betrachtete strömende Medium bzw. Fluid ist Luft. Luft ist ein Gasgemisch aus Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenstoffdioxid und kleinen Anteilen an Edelgasen. Es wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Anteile sich bereits vollständig durchmischt haben, sodass das Fluid Luft als einzelnes Fluid (Phase) angesehen werden kann. Dementsprechend werden in dieser Arbeit ausschließlich Einphasenströmungen betrachtet. Ein Stoffgemisch aus Wasser und Öl ist beispielsweise als zweiphasig anzusehen, da sich das Öl mit dem Wasser nicht vermischt [1]. Für weitere Informationen zu Zwei- bzw. Mehrphasenströmungen wird auf [1], [3] verwiesen.

2.3 Inkompressible - kompressible Strömungen

Um zu klären, ob eine Strömung inkompressibel oder kompressibel ist, gilt es festzustellen, in welchem Aggregatzustand sich das Fluid befindet. In der Regel gelten Strömungen flüssiger Fluide gelten als inkompressibel, da Flüssigkeiten ihre Dichte auch bei hohen Druckbeanspruchungen nur in vernachlässigbarem Maße ändern. Die Strömung eines gasförmigen Fluids wird als kompressibel angesehen, wenn die

Druckbeanspruchungen der Strömung ausreichen, um relevante Änderungen der Dichte des Gases zu bewirken. Die Kompressibilität einer Strömung ist folglich nicht ausschließlich von den Stoffeigenschaften des Fluids, sondern auch von anderen Eigenschaften der Strömung (z. B. Druck und Geschwindigkeit) abhängig. Man unterscheidet daher nicht zwischen inkompressiblen und kompressiblen Fluiden, sondern zwischen inkompressiblen und kompressiblen Strömungen. Um herauszufinden unter welchen Umständen die Druckbeanspruchungen einer Strömung so hoch sind, dass die Strömung als kompressible Strömung angesehen wird, wird die Bernoulli-Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{const.} \quad (2.1)$$

betrachtet. Diese stellt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Druck (hier eindimensional) in einer Strömung dar. Nach Umformung und Einsetzen der Mach-Zahl¹

$$M = \frac{u}{u_s} \quad (2.2)$$

erhält man:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{d(M^2)}{1 + \frac{1}{2}M^2} \quad (2.3)$$

Gl. 2.3 beschreibt die relative Änderung der Dichte in Abhängigkeit von der Mach-Zahl. Ist die Geschwindigkeit der Strömung größer als $\sim 30\%$ der Schallgeschwindigkeit², treten signifikante Dichteänderungen auf. Dementsprechend sind Strömungen von Gasen, in denen sich das Fluid oder ein anderes Medium durch das Fluid mit einer Geschwindigkeit kleiner als 30% der Schallgeschwindigkeit bewegt, als inkompressibel anzusehen [1].

Extreme Stürme (Orkane) erreichen Windgeschwindigkeiten von bis zu ~ 75 m/s. Folglich sind auch Windströmungen, die in Stürmen auftreten, inkompressible Strömungen.³ Weiterhin bewegen sich die Windgeschwindigkeiten der Windkanalversuche, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Referenzversuche dargestellt werden, im Bereich von 5 - 10 m/s. Folglich werden sämtliche in dieser Arbeit betrachtete Strömungen als inkompressibel angesehen.

Kompressible Strömungen sind z. B. Luftströmungen um Tragflügel von Flugzeugen (Mach-Zahl $\approx 0,85$) oder Wasserdampfströmungen in Turbinen (Mach-Zahl $\approx 0,7$) [1].

2.4 Strömungen von newtonschen - nichtnewtonschen Fluiden

Die Eigenschaft, die ein newtonsches Fluid von einem nichtnewtonschen Fluid unterscheidet, kann anhand des folgenden Experiments erläutert werden (s. Abb. 2.1). Zwischen zwei parallelen Platten befindet sich ein Fluid. Die obere Platte wird mit der Geschwindigkeit U in horizontaler Richtung bewegt. Die untere Platte bewegt sich nicht. Handelt es sich um ein newtonsches Fluid zwischen den Platten, so stellt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil zwischen den Platten ein. Die Schubspannung zwischen den Fluidschichten

¹ u_s entspricht der Schallgeschwindigkeit (ca. 343 m/s)

²Mach-Zahl $M = 0,3$ entspricht einer Geschwindigkeit von ~ 100 m/s

³Windgeschwindigkeiten von Tornados können lokal weitaus höher liegen. Diese Strömungen werden hier nicht betrachtet.

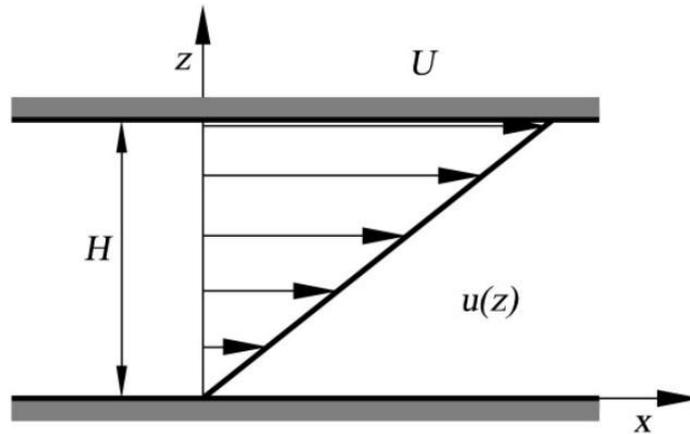


Abbildung 2.1: Geschwindigkeitsprofil eines newtonschen Fluids. Quelle: [1]

folgt dementsprechend dem newtonschen Reibungsgesetz

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{U}{H}. \quad (2.4)$$

Die Proportionalitätskonstante μ wird in diesem Zusammenhang als dynamische Zähigkeit bezeichnet [1]. Sämtliche Gase, dementsprechend auch das Fluid Luft, und einige Flüssigkeiten (z. B. Wasser) gelten als newtonsche Fluide [1].

2.5 Isotherme - nicht isotherme Strömungen

Isotherme Strömungen sind Strömungen, in denen sich die Temperatur des Fluids weder örtlich noch zeitlich verändert. Hier gilt dementsprechend:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Die zeitlichen und örtlichen Temperaturschwankungen in Windströmungen um Bauwerke bewegen sich in einem kleinen Rahmen, sodass diese vernachlässigt werden.⁴ Folglich werden in dieser Arbeit ausschließlich isotherme Strömungen betrachtet.

2.6 Laminare - turbulente Strömungen

In der Strömungsmechanik wird allgemein zwischen laminaren und turbulenten Strömungen unterschieden. Ein Fluid bewegt sich in laminaren Strömungen auf parallel zueinander verlaufenden Stromlinien. Energieaustausch, senkrecht zur Stromlinienrichtung, tritt nur in einem vernachlässigbaren Rahmen auf. In turbulenten Strömungen herrscht dagegen hoher Impuls- bzw. Energieaustausch senkrecht zur Bewegungsrichtung des Fluids, sodass geordnete Stromlinien in vielen Situationen nicht zu erkennen sind.

⁴Dies gilt auch für Versuche im Windkanal

Stattdessen lassen sich teilweise ungeordnete Wirbel, Fluktuationen und Impulsaustausch in allen drei Raumrichtungen beobachten. Turbulente Strömungen sind folglich immer instationär und dreidimensional.

Der reynoldsche Farbfadenversuch erklärt anschaulich den Unterschied zwischen laminaren und turbulenten Strömungen. Hierzu wird in einer Rohrströmung mittels einer Sonde an einem Punkt des Strömungsquerschnitts Farbe eingeleitet. Die Farbteilchen werden mit der Strömung durch das Rohr transportiert (s. Abb. 2.2). Dabei bildet sich ein Farbfaden, der die Stromlinien des Fluids beschreibt. Seine Bewegung wird durch den Verlauf der Strömung bestimmt [1]. Der Farbfaden ist in laminaren Strömungen zusammenhängend und verläuft geradlinig. In turbulenten Strömungen ist er dagegen durch die Turbulenz zerrissen worden. Weiterhin zeigen die offenbar zufällig bzw. chaotisch im Rohr verteilten Fragmente des Farbfadens wirbelähnliche Strukturen (s. Abb. 2.2). Die dimensionslose Kenngröße, die den Grad der

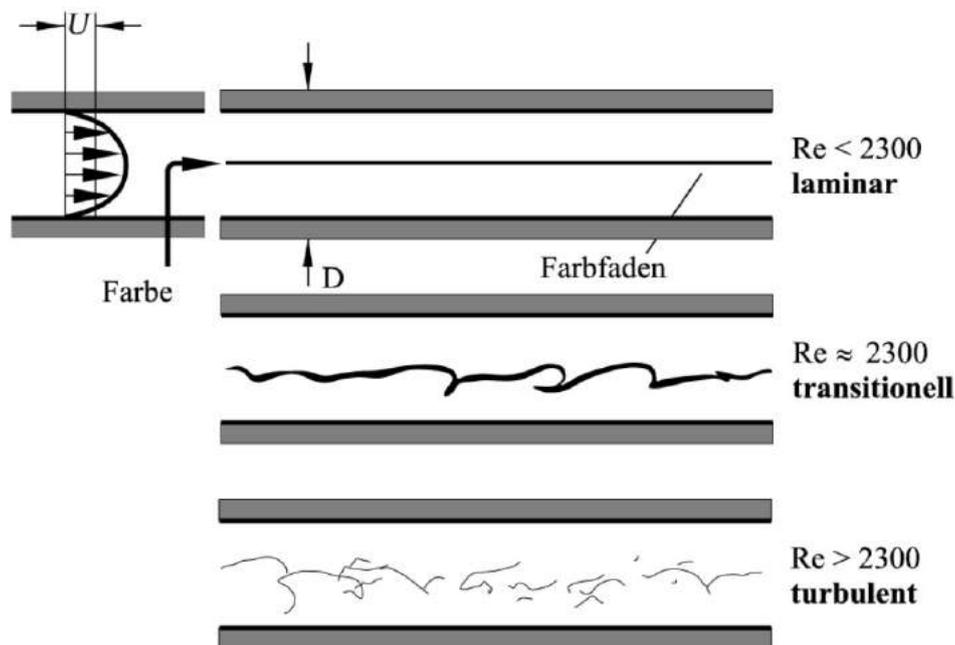


Abbildung 2.2: Reynoldsscher Farbfadenversuch. Quelle: [1]

Turbulenz einer Strömung beschreibt, ist die Reynoldszahl

$$Re = \frac{u_{\infty} \cdot l_{rel}}{\nu} \quad (2.6)$$

Sie beschreibt das Verhältnis von Trägheitskraft und Reibungskraft. Dabei bezeichnen l_{rel} eine Referenzlänge der Strömungsgeometrie und ν die kinematische Viskosität des Fluids. Je höher die Reynoldszahl ist, desto höher ist der Grad der Turbulenz. Die Reynoldszahl ist u. a. dann groß, wenn die Viskosität klein ist. In diesem Fall ist die Reibungskraft bzw. Scherkraft der Fluidschichten gering und die Trägheitskraft überwiegt in der Strömung. Zwischen laminaren und turbulenten Strömungen gibt es einen transitionellen Übergangsbereich. Bei welcher Reynoldszahl dieser Bereich zu sehen ist, hängt von der betrachteten Strömung ab. Der Übergangsbereich in einer Rohrströmung befindet sich bei einer

Reynoldszahl von etwa 2300 [1].

Die für Bauingenieure relevanten Strömungen, wie z. B. die Umströmung von Kraftwerksschornsteinen, sind überwiegend turbulent⁵. Das folgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

Ausgegangen wird von einer Windumströmung eines kreiszylinderförmigen Schornsteins mit einem Durchmesser von 5 m. Die Windgeschwindigkeit beträgt 15 m/s. Die kinematische Viskosität von Luft beträgt bei Raumtemperatur und atmosphärischem Druck etwa $15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Das bedeutet die Reynoldszahl dieser Strömung beträgt: $Re = \frac{U_\infty \cdot D}{\nu} = \frac{15 \cdot 5}{15 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^6$. Eine Strömung mit einer Reynoldszahl im Bereich von 10^6 weist viele ausgeprägte turbulente Strukturen auf. Dementsprechend sind die in dieser Arbeit dargestellten Strömungen fast ausschließlich turbulent. Im Kap. 9 wird noch detaillierter auf turbulente Strömungen eingegangen und es werden Möglichkeiten erörtert, diese zu modellieren.

2.7 Reaktive - nicht reaktive Strömungen

Reaktive Strömungen sind Strömungen, in denen chemische Reaktionen stattfinden. In Brandsimulationen ist dies beispielsweise der Fall. Hier kommt es zu chemischen Reaktionen durch Verbrennungsprozesse [4]. Dementsprechend sind diese Vorgänge neben der eigentlichen Strömung ebenfalls zu modellieren. Bei Windströmungen kommt es zu keinerlei chemischen Reaktionen. Die in dieser Arbeit vorgestellten Strömungen sind folglich ausnahmslos nicht reaktiv.

⁵Dies gilt auch für im Windkanal modellierte Strömungen

3 Physikalische und mathematische Beschreibung von Strömungen

Strömungen können mathematisch durch die eulersche Beschreibungsweise der Kontinuumsmechanik dargestellt werden. D. h. es wird ein ortfestes, infinitesimal kleines Kontrollvolumen in der Strömung betrachtet (s. Abb. 3.1). Die Strömung wird über die Strömungsgrößen des jeweils betrachteten Kontrollvolumens beschrieben. Die Strömungsgrößen sind damit ebenfalls ortsfest. Die Größen, die eine Strömung eindeutig beschreiben sind:

- Geschwindigkeit $\vec{u}(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} u(t,x,y,z) \\ v(t,x,y,z) \\ w(t,x,y,z) \end{pmatrix}$
- Druck $p(t,x,y,z)$
- Temperatur $T(t,x,y,z)$

Andere Größen, wie z. B. die Dichte, können aus den drei genannten Größen abgeleitet werden. Die drei Erhaltungssätze der Physik für Massen-, Impuls- und Energieerhaltung müssen in Strömungen eingehalten werden. Die Strömungsgrößen lassen sich über die Lösung dieser Erhaltungsgleichungen bestimmen [5].

3.1 Massenerhaltung

Es wird ein infinitesimal kleines Kontrollvolumen in einer Strömung untersucht (s. Abb. 3.1). Da in dieser Arbeit ausschließlich nicht reaktive Strömungen betrachtet werden (s. Kap. 2.7), wird davon ausgegangen, dass innerhalb eines Kontrollvolumens weder Masse entsteht noch Masse vernichtet wird. Sollte sich die Masse eines Kontrollvolumens verändern, so muss dies daran liegen, dass mehr bzw. weniger Masse über einen Rand einströmt als auf der anderen Seite ausströmt [4]. D. h., die Änderung der Masse im Volumen setzt sich aus der Differenz der Massenströme über die Ränder zusammen. Es gilt folglich [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz) + \left[(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz - \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz \\ + \left[(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) \cdot dy \right] \cdot dx \cdot dz - \rho \cdot v \cdot dx \cdot dz \\ + \left[(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial w} (\rho \cdot w) \cdot dz \right] \cdot dx \cdot dy - \rho \cdot w \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (3.1) \end{aligned}$$

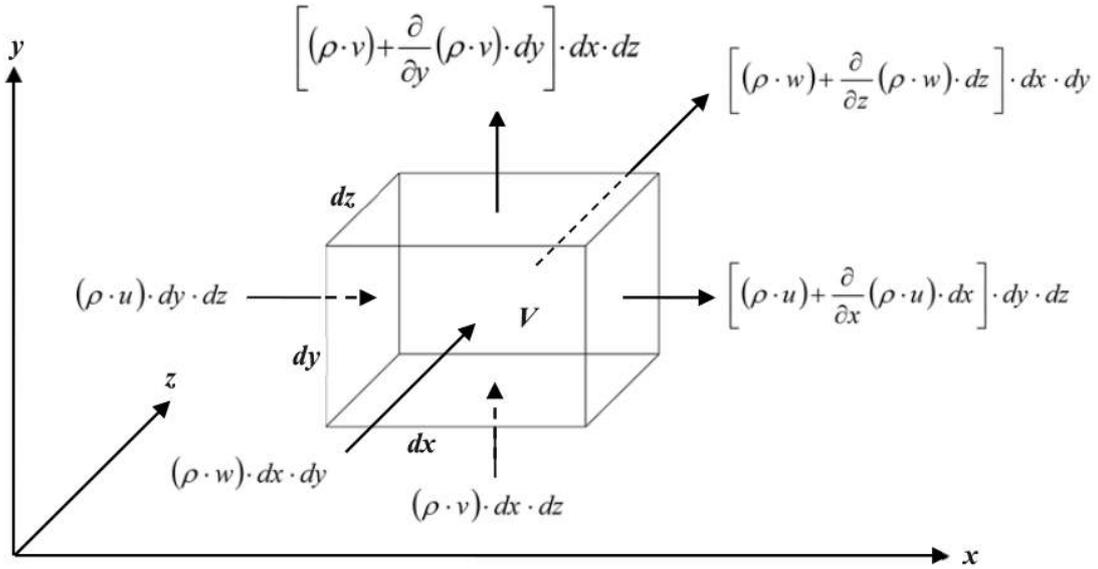


Abbildung 3.1: Massenströme an einem Kontrollvolumen. Quelle: [5]

Nach Kürzungen und Umformungen erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0 \quad (3.2)$$

Gleichung 3.2 wird auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet. In Divergenzform lautet die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \quad (3.3)$$

Weiterhin lässt sich die Gleichung mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \cdot u_i) = 0 \quad (3.4)$$

Dabei gilt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Die Einsteinsche Summenkonvention erweist sich als hilfreich bei der Darstellung von Gleichungen der Turbulenzmodellierung (RANS bzw. LES) (s. Kapitel 9) und wird daher im folgenden Teil dieser Thesis gegenüber der Divergenzform bevorzugt.

Wie bereits im Kap. 2.3 geklärt, werden in dieser Arbeit ausschließlich inkompressible Strömungen studiert. Das bedeutet, für alle hier betrachteten Strömungen gilt, dass die Dichte sowohl zeitlich als auch örtlich konstant ist. Folglich gilt auch:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \cdot u_i) = (\rho) \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i) \quad (3.6)$$

Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen kann zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i) = 0 \quad (3.7)$$

vereinfacht werden [1].

3.2 Impulserhaltung

Es werden sämtliche Kräfte bzw. Impulsströme an einem infinitesimal kleinen Kontrollvolumen untersucht (s. Abb. 3.2). Die Kräfte setzen sich aus den über die jeweiligen Ränder integrierten Drücken, Normal- und Schubspannungen zusammen. Externe Kräfte, wie z. B. die Gewichtskraft, werden vernachlässigt. Es kann in jede Koordinatenrichtung die Summe, der in dieser Richtung wirkenden Kräfte, bestimmt

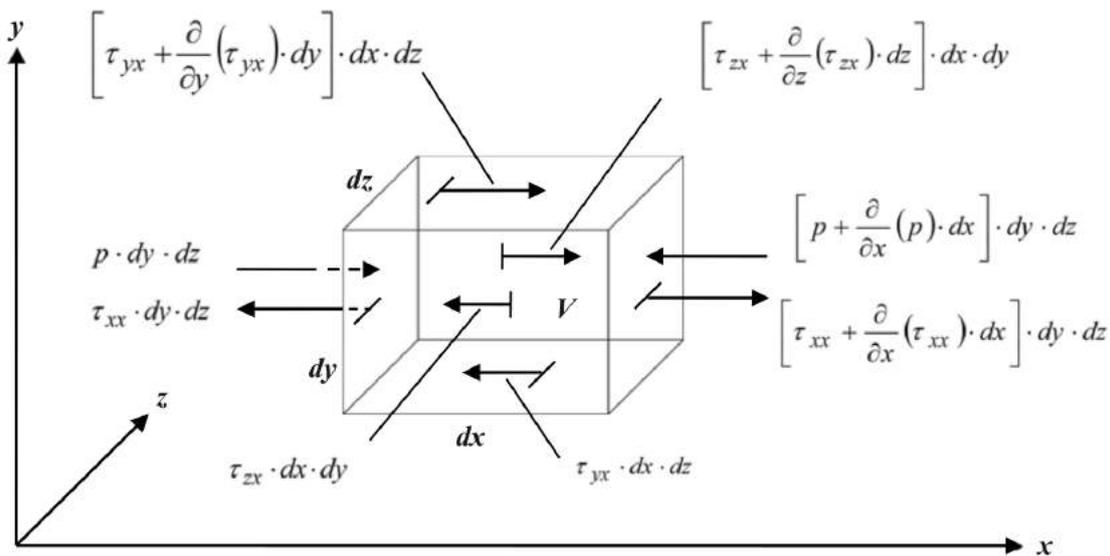


Abbildung 3.2: Kräfte an einem Kontrollvolumen (nur in x-Richtung). Quelle: [5]

werden. Dies ist hier exemplarisch für die x-Richtung dargestellt [5]:

$$F_x = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}) - \frac{\partial p}{\partial x} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.8)$$

Nach Newton gilt bekanntermaßen

$$F = m \cdot a, \quad (3.9)$$

mit

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (3.10)$$

a bezeichnet die Beschleunigung bzw. das totale Differential der Geschwindigkeit nach der Zeit (s. Gl. 3.11) [5].

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.11)$$

Setzt man Gl. 3.8, 3.10, 3.11 in die newtonsche Bewegungsgleichung ein, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3.12)$$

bzw. nach weiteren Umformungen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w - \tau_{zx}) = 0, \quad (3.13)$$

die Impulsgleichung (für die x-Richtung).

Bei Betrachtung von newtonschen Fluiden lassen sich mit Hilfe der Stokesschen Beziehungen sämtliche Normal- und Schubspannungen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der dynamischen Viskosität (s. Kap. 2.4) ausdrücken (s. Gl. 3.14 und Gl. 3.15 (exemplarisch für τ_{xx} und τ_{xy})).

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.15)$$

Werden die Stokesschen Beziehungen in die Impulsgleichung (x-Richtung) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p + \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \cdot u \cdot v - \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cdot u \cdot w - \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da die Reihenfolge der Ableitungen vertauschbar ist, kann Gl. 3.16 umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p + \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \cdot u \cdot v - \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cdot u \cdot w - \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es wird nach wie vor von einer inkompressiblen Strömung ausgegangen. D. h., es gilt (vgl. Gl. 3.7):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

Dementsprechend kann Gl. 3.17 für inkompressible Strömungen weiter zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) - \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

vereinfacht werden.

Weiterhin gilt in inkompressiblen Strömungen, dass die Dichte ρ als räumlich und zeitlich konstant

angesehen werden kann. Unter Berücksichtigung dieser Annahme und weiteren Umformungen erhält man die endgültige Impulsgleichung für inkompressible Strömungen (x-Richtung) [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.20)$$

wobei

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.21)$$

Die Herleitung der Impulsgleichungen für die übrigen Koordinatenrichtungen geschieht analog.

Die Darstellung der Impulsgleichung durch die Einsteinsche Summenkonvention (Tensornotation) lautet:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \cdot u_j) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.22)$$

Es wurde bereits festgestellt (vgl. Kapitel 2.5), dass die in dieser Arbeit zu untersuchende Strömung als isotherm anzusehen ist. D. h., zusätzlich zur Dichte ist auch die Temperatur der Strömung räumlich und zeitlich konstant. Dichte sowie Temperatur sind damit (abhängig vom gewählten Fluid) über Rand- und Anfangsbedingungen an jedem Ort und zu jeder Zeit bekannt. Weitere Gleichungen zur Berechnung dieser Größen erübrigen sich dementsprechend. Folglich sind alle notwendigen bzw. hinreichenden Differentialgleichungen zur Berechnung von inkompressiblen, isothermen, instationären, nicht reaktiven Strömungen von newtonschen Fluiden hergeleitet und werden im Folgenden noch einmal zusammengefasst:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} (u) + \frac{\partial}{\partial y} (v) + \frac{\partial}{\partial z} (w) = 0 \quad (3.23)$$

Impulsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.26)$$

Es ist anzumerken, dass die Kontinuitätsgleichung nicht als eigenständige Gleichung angesehen werden kann, da die Informationen der Gleichung bereits bei der Herleitung der Impulsgleichungen verwendet wurden. Dennoch muss die Kontinuitätsgleichung natürlich nach wie vor an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, da ansonsten die Herleitung der Impulsgleichung nicht korrekt wäre. Die Kontinuitätsgleichung ist daher als Nebenbedingung der Impulsgleichungen anzusehen. Dies gilt es bei der Lösung des Systems der Erhaltungsgleichungen zu berücksichtigen. Lösungsverfahren zu diesem Problem sind in Kap. 8 dargestellt.

3.3 Randbedingungen

Das System aus Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichungen bildet das Gleichungssystem zur Berechnung der relevanten Strömungsgrößen. Es ist ein partielles Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Dieses System besitzt zunächst unendliche viele Lösungen. Nur durch die Vorgabe von Anfangs-¹ und Randbedingungen entsteht eine spezielle eindeutige Lösung des Systems für das gegebene Strömungsszenario. Es handelt sich also um ein Anfangs-Randwertproblem. Die Wahl der genauen Anzahl und Art der Randbedingungen ist nicht trivial, wirkt sich jedoch entscheidend auf die numerische Lösbarkeit des Systems aus. Sind zu wenig Randbedingungen gesetzt, ist das Gleichungssystem unterbestimmt, d. h. unendlich viele Lösungen des Systems sind möglich. Ein numerisches Verfahren scheitert hier oder liefert unphysikalische Ergebnisse. Ist das Gleichungssystem durch zu viele Bedingungen überbestimmt, so ist eine numerische Lösung ebenfalls nicht möglich [1]. Es existieren keine mathematischen Regeln, die vorgeben, wieviele Randbedingungen erforderlich sind bzw. an welche Strömungsgrößen oder deren Ableitungen diese gestellt werden müssten. Daher werden die Bedingungen über physikalische Überlegungen abgeleitet [1].

Ein Strömungsfeld kann u. a. durch eine feste reibungsbehaftete Wand begrenzt werden. Hier fällt die Geschwindigkeit in Wandnähe² durch die Anziehungskräfte von Wand- und Fluidmolekülen auf Null herab (s. Abb 3.3). Dementsprechend lautet hier die Randbedingung $\vec{u} = 0$. Der Druck an Wänden ist zunächst

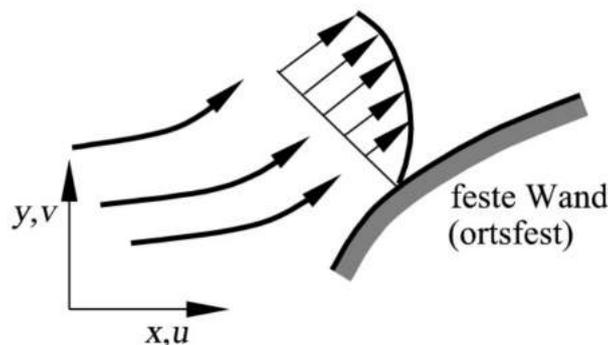


Abbildung 3.3: Randbedingung an einer reibungsbehafteten ortsfesten Wand. Quelle: [1]

nicht bekannt und wird erst über die Lösung der Erhaltungsgleichungen bestimmt. Strömungsfelder werden u. a. auch durch sogenannte Ein- bzw. Ausströmrande begrenzt. Betrachtet wird beispielsweise eine Umströmung eines Körpers in einem Kanal (s. Abb. 3.4). Hier kann jeweils am Ein- bzw. Ausströmrand die Geschwindigkeit oder der Druck (s. Abb. 3.4) vorgegeben werden, nicht jedoch beide Strömungsgrößen. Die Vorgabe beider Größen würde zu einem überbestimmten Gleichungssystem führen und eine Lösung unmöglich machen. Ist eine Strömungsgröße an einem Rand vorgegeben, so wird in der Regel (auch für Wände) eine Bedingung an die Ableitung der anderen Strömungsgröße gestellt [1]. Für einen

¹Anfangsbedingungen sind ausschließlich bei instationären Strömungen erforderlich

²Insbesondere bei turbulenter Strömung ist das Strömungsverhalten in Wandnähe nicht trivial und bedarf weiterer Überlegungen (s. dazu Kap. 9.4.3).

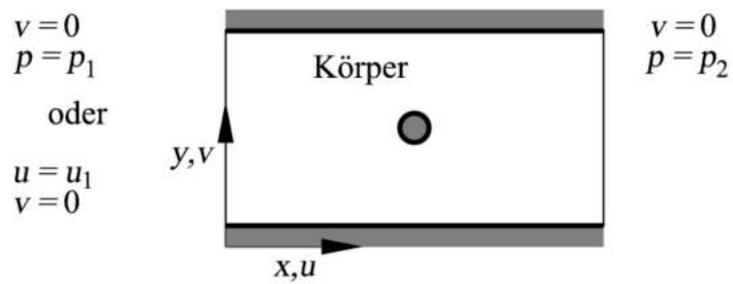


Abbildung 3.4: Mögliche Randbedingungen einer Kanalströmung. Quelle: [1]

Einströmrand wären folglich folgende Randbedingungen denkbar:

$$u = u_1 = u_\infty, v = 0, w = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3.27)$$

Als Anfangsbedingungen werden beide Strömungsgrößen in jedem Punkt des Strömungsfelds zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben.

4 Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

4.1 Analytische Lösung

Für einige Vereinfachungen der Navier-Stokes-Gleichungen existieren für bestimmte Randbedingungen analytische Lösungen. Zu diesen Vereinfachungen gehören u. a. die sogenannten Schichtenströmungen, in denen sich die Strömung nur in eine Koordinatenrichtung bewegt. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser wird vernachlässigt. Eine weitere Vereinfachung ist die Potentialströmung. Für weitere Informationen über mögliche Vereinfachungen der Navier-Stokes-Gleichungen wird auf [1], [3] verwiesen. Für sämtliche zwei- oder dreidimensionale, reibungsbehaftete Strömungen, folglich auch für die in dieser Arbeit betrachtete isotherme, inkompressible Strömung, ist keine allgemeine analytische Lösung bekannt [1], [3].

4.2 Numerische Lösung

4.2.1 Allgemeines

Es besteht die Möglichkeit, die Erhaltungsgleichungen numerisch über eine Diskretisierung des Strömungsfeldes approximativ zu lösen. Die Diskretisierung beinhaltet die Darstellung des Strömungsfeldes über diskrete Punkte bzw. kleine Flächenelemente oder Volumenelemente. Die Geometrie der Elemente bzw. Lage der Punkte werden durch ein Gitternetz definiert. Man spricht auch von einem numerischen Gitter (s. Abb. 4.1) [1], [3]. Mit Hilfe der Diskretisierung kann das partielle Differentialgleichungssystem,

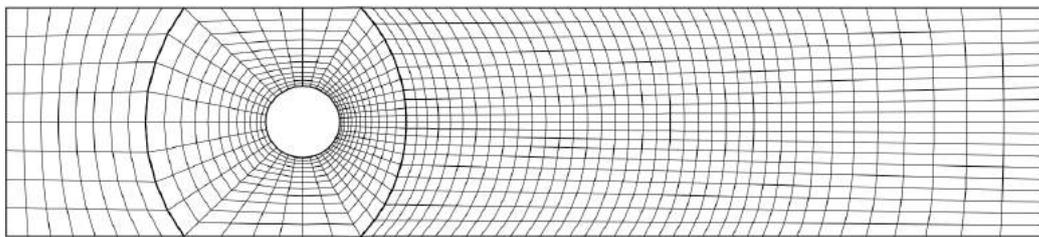


Abbildung 4.1: Numerisches Gitter zur Berechnung einer Strömung um einen Zylinder. Quelle: [1]

bestehend aus den Erhaltungsgleichungen (vgl. Gl. 3.23 und Gl. 3.24 - 3.26), durch ein algebraisches Gleichungssystem ersetzt werden und so eine approximative Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems an den diskreten Punkten oder Elementen bestimmt werden [3]. Die Abweichung der Lösung des algebraischen Gleichungssystems von der Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems hängt dabei stark von der gewählten Diskretisierung ab.

Das entstandene algebraische Gleichungssystem enthält in den meisten Fällen eine hohe Zahl von Gleichungen bzw. Unbekannten und ist daher in der Regel ausschließlich mit Hilfe von Computern lösbar [1],[3].

Numerische Lösungen sind immer fehlerbehaftet. Der zu berücksichtigende Fehler ergibt sich aus mehreren Fehlerquellen. Zum einen beinhaltet ein mathematisches Modell in vielen Fällen selbst Vereinfachungen. Analytische sowie numerische Lösungen der Modelle bilden damit nicht exakt die Realität ab. Weiterhin entstehen Fehler durch Approximationen bei der Diskretisierung des Strömungsfeldes und bei der Lösung des algebraischen Gleichungssystems, welches oft durch iterative Verfahren gelöst wird. Die Fehler gilt es im Einzelfall abzuwägen und zu bewerten.

Die Qualität einer numerischen Lösung hängt nicht nur von der Wahl des Diskretisierungsverfahrens, sondern insbesondere vom Diskretisierungsgrad ab. Der Diskretisierungsgrad beschreibt die Anzahl der eingesetzten Punkte oder Elemente, die das Strömungsfeld repräsentieren. Bei einer hohen Anzahl von diskreten Stellen sind die Elemente bzw. die Flächen oder Volumina, die jeweils eine diskrete Stelle repräsentieren, entsprechend klein. Beliebiger genaue Lösungen sind zwar durch entsprechend feine Diskretisierung erreichbar, jedoch steigt mit dem Diskretisierungsgrad auch die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten des algebraischen Gleichungssystems und damit die Rechenzeit und der Speicheraufwand, um diese zu lösen. Insbesondere für die Berechnung einer adäquaten Lösung von bestimmten turbulenten Strömungen müsste der Diskretisierungsgrad so hoch sein, dass die Rechenzeit extrem bzw. der Speicheraufwand kaum zu realisieren wäre (s. Kap. 9). In diesen Fällen ist der Einsatz von weiteren Modellen zur Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen sinnvoll. Hier gilt es zu berücksichtigen, dass die eingeführten Modelle ggf. zusätzliche Fehler erzeugen [1], [3].

4.2.2 Numerische Gitter

Strukturierte Gitter

Eine Möglichkeit, Gebiete durch Punkte oder Elemente zu diskretisieren, ist die Anordnung der diskreten Stellen durch ein strukturiertes bzw. regelmäßiges Gitter. In strukturierten Gittern besitzen die Punkte oder Elemente in der Ebene stets vier bzw. im Raum sechs Nachbarn. Diese Regelmäßigkeit erlaubt die Indizierung der Elemente durch drei Indizes (i,j,k) . Um die Indizes der Nachbarn zu erhalten, ist der jeweilige Index der zu betrachtenden Koordinatenrichtung um eins zu erhöhen oder zu verringern. Die Indizes der Nachbarn in x-Richtung lauten beispielsweise $(i-1,j,k)$ bzw. $(i+1,j,k)$ [1], [3].

Die einfachste Form des strukturierten Gitters ist das kartesische Gitter. Hier verlaufen die Gitterlinien parallel zu den Koordinatenachsen (s. Abb. 4.2). Die Gitterlinien sind dabei ggf. äquidistant verteilt. In vielen Fällen ist es in der numerischen Strömungsmechanik sinnvoll lokale Bereiche höher aufzulösen, d. h. in bestimmten Bereichen eine höhere Anzahl von Punkten oder kleineren Elementen zu verwenden. In diesen Situationen bietet es sich an, blockstrukturierte Gitter zu verwenden. Hier wird das Gebiet in Blöcke unterteilt, in denen jeweils strukturierte Gitter mit unterschiedlicher Form und unterschiedlichem Diskretisierungsgrad vorliegen. Die Gitterlinien der Blöcke müssen dabei weder äquidistant sein noch parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Sie können ggf. einem Körper angepasst gekrümmt sein (s. Abb. 4.3). Abb. 4.1 zeigt ein blockstrukturiertes Gitter mit drei Blöcken. Um die entscheidenden Bereiche um den Zylinder herum feiner aufzulösen, ist auch innerhalb der Blöcke eine Verdichtung der Gitterlinien

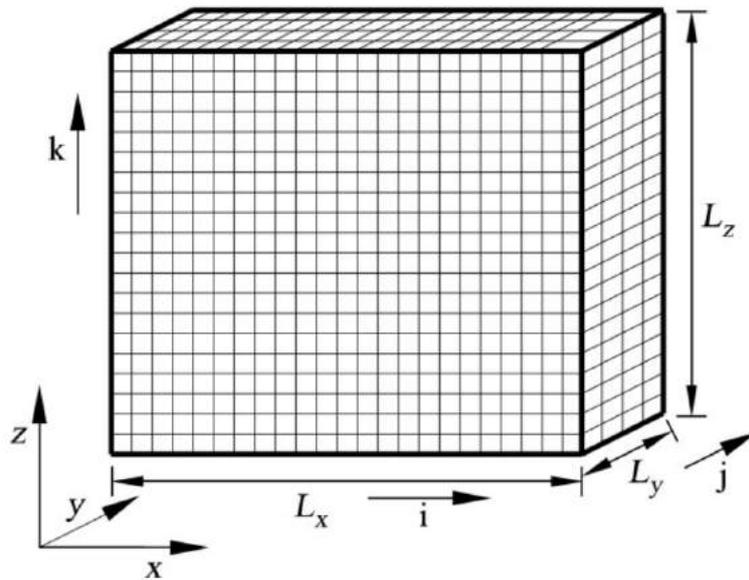


Abbildung 4.2: Kartesisches äquidistantes Gitter. Quelle: [1]

vorgenommen.

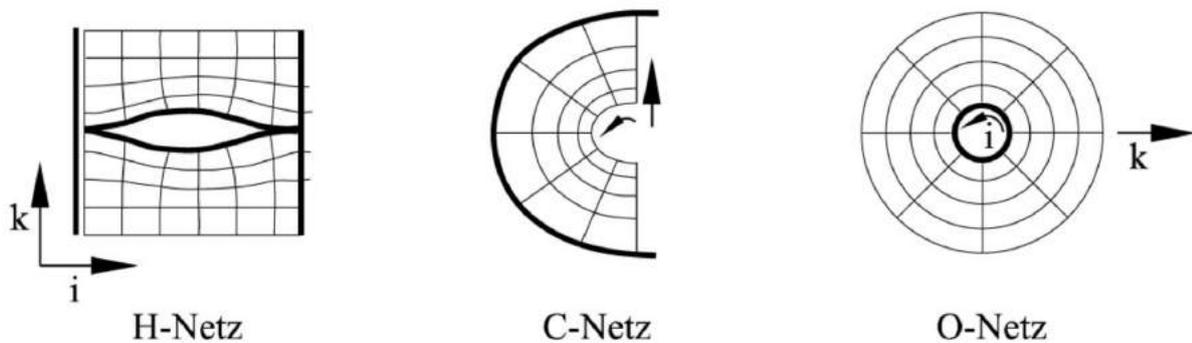


Abbildung 4.3: Verschiedene strukturierte Gitterformen. Quelle: [1]

Unstrukturierte Gitter

Unstrukturierte Gitter lassen sich im Gegensatz zu strukturierten Gittern flexibler und genauer an komplizierte Geometrien anpassen. Da die Anzahl der Nachbarn der Elemente oder Punkte des Gitters nicht vorgeschrieben ist, können die Elemente aus beliebigen Polygonen bzw. Polyedern, wie z. B. Dreiecke bzw. Tetraeder bestehen. Mit den entsprechenden Elementen lassen sich insbesondere Felder in der Umgebung gekrümmter Körper besser darstellen. Die Verwendung von unterschiedlichen Elementen innerhalb eines Gitters ist ebenfalls möglich (s. Abb. 4.4) [1], [3].

Die unstrukturierte Verteilung der diskreten Stellen zeigt jedoch auch Nachteile. Die Lage der Elemente

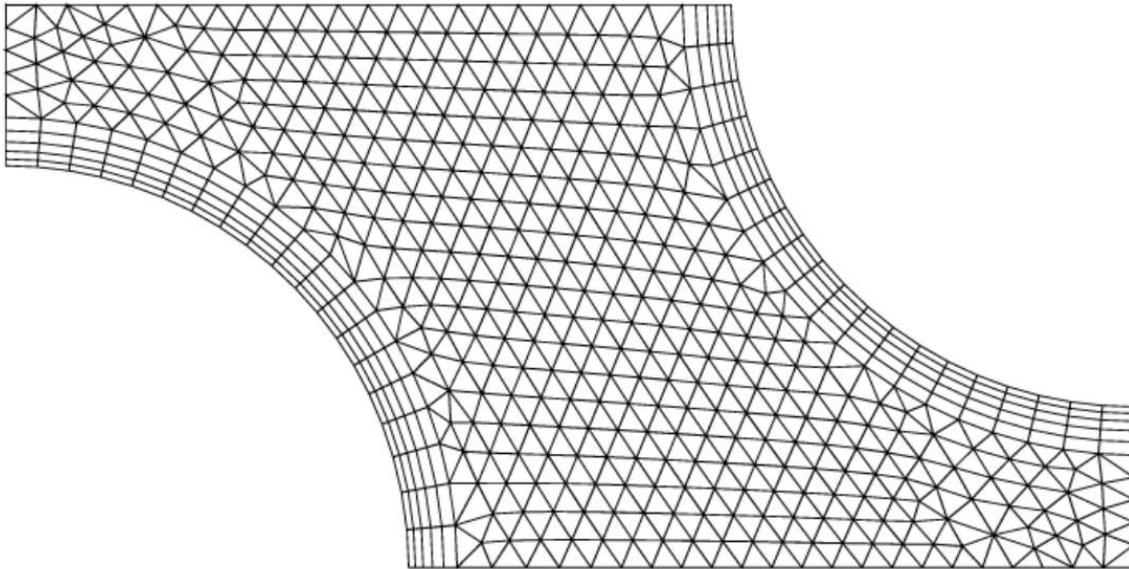


Abbildung 4.4: Unstrukturiertes Gitternetz. Quelle: [3]

oder Punkte und die Anzahl und Lage ihrer Nachbarn ist im Vorfeld nicht bekannt und muss ermittelt werden. Weiterhin weist die Matrix des entstehenden algebraischen Gleichungssystems keine regelmäßige diagonale Struktur auf. Ggf. muss die Reihenfolge der diskreten Stellen umsortiert werden. Die Lösung der Gleichungssysteme für unstrukturierte Gitter ist u. a. daher im Allgemeinen aufwändiger. Für Informationen über die Generierungsverfahren von strukturierten und unstrukturierten Gittern wird auf [6], [7] verwiesen.

4.2.3 Diskretisierungsmethoden

Im Folgenden sind die drei gängigsten Diskretisierungsmethoden aufgeführt:

1. Finite-Differenzen-Methode (FDM)
2. Finite-Volumen-Methode (FVM)
3. Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die Finite-Differenzen-Methode verwendet die Erhaltungsgleichungen in Differentialform. In jedem Gitterpunkt (Schnittpunkt der Gitterlinien) werden die partiellen Ableitungen in den Differentialgleichungen durch Approximationen ersetzt. Man erhält für jeden Gitterpunkt eine algebraische Gleichung, die die Strömungsgrößen des Punktes und seiner Nachbarn als Unbekannte enthält. Bei Verwendung von strukturierten, insbesondere kartesischen Gittern, ist die Finite-Differenzen-Methode sehr effizient. Für viele Brandsimulationen, z. B. in der Software FDS, wird sie verwendet, da hier oft große Geometrien (z. T. mehrere Räume) simuliert werden sollen und damit die Effizienz des Lösungsalgorithmus eine große Rolle spielt, um diese Simulationen in angemessener Zeit zu realisieren. Dabei nimmt man in Kauf, dass

im Besonderen gekrümmte Körper durch kartesische Gitter nur vereinfacht dargestellt werden können. Da die möglichst detaillierte Darstellung von Geometrien von strömungsmechanischen Problemen große Bedeutung hat, ist die Finite-Differenzen-Methode für diese Probleme, insbesondere für die Verwendung unstrukturierter Gitter, ungeeignet und wird in der Regel hierfür nicht verwendet. Für ausführliche Informationen über die FDM sei auf [1], [3] verwiesen.

Die Finite-Volumen-Methode und die Finite-Elemente-Methode erlauben jeweils die Benutzung von unstrukturierten Gittern und finden u. a. daher Anwendung in vielen Programmen. Da die in dieser Arbeit ausschließlich verwendete Software OPENFOAM die Erhaltungsgleichungen mit Hilfe der FVM berechnet, wird auf die FVM im folgenden Kapitel ausführlich eingegangen. Informationen über die FEM zur Anwendung auf die Erhaltungsgleichungen sind in [8], [9] zu finden.

5 Finite-Volumen-Methode (FVM)

5.1 Allgemeines

Zur Anwendung der FVM wird das Gebiet in eine bestimmte Anzahl von Volumina (Kontrollvolumina) geteilt und die Erhaltungsgleichungen für jedes Kontrollvolumen aufgestellt. Das numerische Gitter beschreibt dabei die Ränder der Kontrollvolumina (s. Abb. 5.1). Die Berechnung der Strömungsgrößen er-

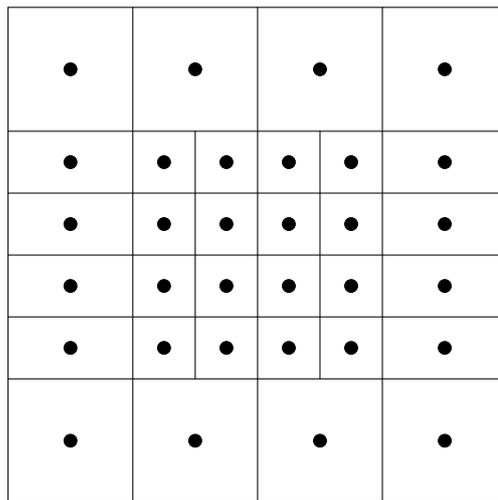


Abbildung 5.1: Diskretisierung durch die FVM. Rechenpunkte befinden sich in der Mitte der Volumina.

folgt bei der FVM für die Schwerpunkte der Kontrollvolumina. Im einfachsten Fall werden die Strömungsgrößen des Schwerpunktes für die Strömungsgrößen sämtlicher Stellen im Kontrollvolumen übernommen. In den meisten Fällen werden jedoch Interpolationen benutzt, um die Größen, z. B. an den Rändern der Volumina, in Abhängigkeit von den Größen der Schwerpunkte zu berechnen.

Ziel der FVM ist der Erhalt einer algebraischen Gleichung für jedes Kontrollvolumen, welche die Strömungsgrößen des eigenen Schwerpunkts und der Schwerpunkte der Nachbarn enthält. Das so entstandene Gleichungssystem kann dann mit einem Computer gelöst werden [1], [3].

5.2 Anwendung der FVM auf Diff.-gleichung 1. Ordnung

Nachfolgend werden die notwendigen Schritte für den Erhalt der algebraischen Gleichungen anhand der instationären, zweidimensionalen Differentialgleichung¹ erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial f_z(u)}{\partial z} + c = 0 \quad (5.1)$$

erörtert. Diese Gleichung ist gegenüber den bereits hergeleiteten Impulsgleichungen für inkompressible Strömungen übersichtlicher und ist daher zur Erläuterung der FVM wesentlich besser geeignet.

f_x und f_z sind hier beliebige Funktionen von u . Die Differentialgleichung wird zunächst von der Differentialform in die Integralform umgeformt, indem beide Seiten der Gleichung über dem Gebiet V^2 integriert werden. Die Integration führt zu:

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + c \right) dV = 0 \quad (5.2)$$

bzw.

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dV + \int_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dV + \int_V (c) dV = 0 \quad (5.3)$$

Die integrale Form wird als „schwache“ Form der Differentialgleichung bezeichnet, da sie nicht das Verschwinden des Integranden an jeder Stelle des Gebietes fordert. Verschiedene Funktionen sind denkbar, durch die sich positive und negative Werte innerhalb des Gebietes ausgleichen und damit die Forderung an das Verschwinden des Integrals über das gesamte Gebiet erfüllen, d. h. solche Funktionen erfüllen Gl. 5.3. Dennoch ist die integrale Form als gute Approximation der ursprünglichen Gleichung anzusehen [1]. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes [10]

$$\int_V (\nabla \vec{f}) dV = \int_R (\vec{f} \cdot \vec{n}) dR \quad (5.4)$$

kann der zweite Term der Integralform umgeformt werden. Dabei wird dieser Term, der das Integral der Divergenz von \vec{f} über das Volumen beschreibt, in das Integral des Skalarprodukt von \vec{f} und dem nach außen weisenden Einheitsvektor auf dem Rand des Gebiets ausgedrückt. Anschaulich kann hier der Gaußsche Integralsatz als Gleichgewicht zwischen Quellen bzw. Senken im Kontrollvolumen und dem Ein- und Ausfluss über den Rand interpretiert werden [1].

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf Gl. 5.3 führt zu:

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dV + \int_R (f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z) dR + \int_V (c) dV = 0 \quad (5.5)$$

Gl. 5.5 wird als Ausgangsgleichung der FVM bezeichnet. Sie enthält keine räumlichen Ableitungen mehr, nur noch eine Ableitung nach der Zeit. Folglich ist die Ausgangsgleichung der FVM eine gewöhnliche Differentialgleichung [1]. Nun folgt die Diskretisierung. Das Integrationsgebiet wird in eine finite Anzahl

¹Die Differentialgleichung könnte als ein Modell für Strömungen benutzt werden, in denen Reibung des strömenden Fluids an Körpern oder anderen Fluiden vernachlässigt werden kann.

² V ist hier verallgemeinert, repräsentiert folglich im zweidimensionalen Fall eine Fläche und im dreidimensionalen Fall ein Volumen.

von (Kontroll-)Volumen unterteilt. Die Summe der einzelnen Volumina ergibt wieder das Volumen des gesamten Gebiets. Es gilt:

$$V = \sum_{i,k=1}^{N_x-1, N_z-1} V_{i,k} \quad (5.6)$$

N_x und N_z beschreiben dabei die Anzahl der Schnittpunkte der Gitterlinien, auch Knoten genannt, in der entsprechenden Koordinatenrichtung. Die Anzahl der Kontrollvolumina in x- und z-Richtung entspricht folglich $N_x - 1$ bzw. $N_z - 1$.

Gl. 5.5 wird nun auf jedes Volumen $V_{i,k}$ angewendet. Damit wird die „schwache“ Forderung an das Verschwinden der ursprünglichen Integralform für das gesamte Gebiet wieder verstärkt, indem diese Forderung jetzt an jedes Kontrollvolumen gestellt wird (s. Gl. 5.7) [1].

$$\int_{V_{i,k}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dV + \int_{R_{i,k}} (f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z) dR + c \cdot V_{i,k} = 0 \quad (5.7)$$

Für das weitere Vorgehen wird angenommen, dass u jeweils in jedem Kontrollvolumen konstant ist. An jeder Stelle innerhalb eines Kontrollvolumens besitzt u folglich den Wert $u_{i,k}$ und springt an den Rändern der Volumina auf den Wert $u_{i+/-1,k}$ bzw. $u_{i,k+/-1}$.

Nimmt man an, u sei innerhalb eines Volumens konstant, so ist der Integrand des ersten Integrals in Gl. 5.7 (innerhalb eines Volumens) nicht mehr von einer Raumkoordinate abhängig und kann folglich vor das Integral geschrieben werden. Zusätzlich werden beide Seiten der Gleichung durch $V_{i,k}$ dividiert. Dies führt zu Gl. 5.8.

$$\frac{du_{i,k}}{dt} + \frac{1}{V_{i,k}} \int_{R_{i,k}} (f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z) dR + c = 0 \quad (5.8)$$

Ebenfalls soll gelten, dass die Funktionen f_x und f_z jeweils auf jedem Rand konstant sind. Unter Berücksichtigung dieser Annahme kann das Randintegral in Gl. 5.8 vereinfacht werden (s. Gl. 5.9).

$$\int_{R_{i,k}} (f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z) dR = \sum_{l=1}^4 \left[(f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z)_l \int_{R_l} dR \right]_{i,k} = \sum_{l=1}^4 [(f_x \cdot n_x + f_z \cdot n_z)_l \cdot O_l]_{i,k} \quad (5.9)$$

l beschreibt dabei die Indizierung der Ränder in der Ebene (s. Abb. 5.2). Die jeweils nach außen weisenden Einheitsvektoren \vec{n}_l lassen sich zusätzlich mit den jeweiligen Oberflächen O_l zusammenfassen (s. Gl. 5.10) [1].

$$\vec{n}_l \cdot O_l = \vec{O}_l = \begin{pmatrix} O_{x,l} \\ O_{z,l} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Die getroffenen Annahmen und Umformungen führen zu:

$$\frac{du_{i,k}}{dt} + \frac{1}{V_{i,k}} \sum_{l=1}^4 (f_{x,l} \cdot O_{x,l} + f_{z,l} \cdot O_{z,l})_{i,k} + c = 0 \quad (5.11)$$

Die Funktionen $f_{x,l}$ und $f_{z,l}$ sind Funktionen der Geschwindigkeit u_l auf dem Rand. Da u jedoch nur im Schwerpunkt des Elements bestimmt werden soll, ist die Frage zu klären, wie $f_{x,l}$ und $f_{z,l}$ berechnet werden können. Eine Möglichkeit diese zu berechnen besteht darin, die Mittelung der Funktionen in den

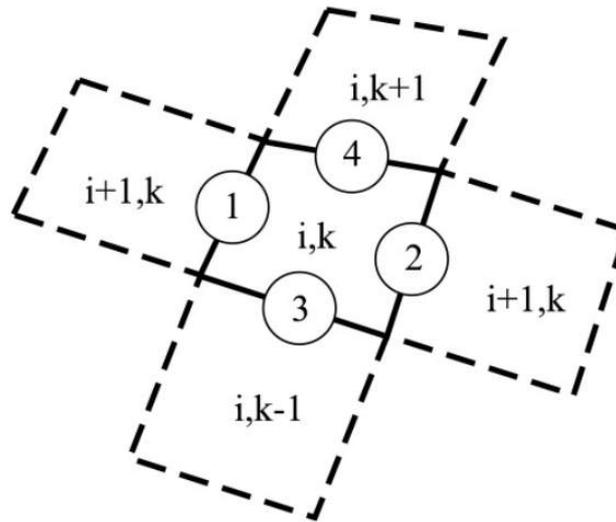


Abbildung 5.2: Indizierung der Randsegmente. Quelle: [1]

Schwerpunkten (lineare Interpolation) zweier benachbarter Volumina zu verwenden. Ggf. sind Interpolationen höherer Ordnung anwendbar [1], [3].

Gl. 5.12 zeigt repräsentativ die Berechnung von f_x auf dem Rand $l = 1$.

$$f_{x,l=1} = \frac{1}{2} (f_x(u_{i,k}) + f_x(u_{i-1,k})) \quad (5.12)$$

Bei Anwendung von Gl. 5.11 und 5.12 auf jedes finite Volumenelement erhält man ein Gleichungssystem gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen. In jeder Gleichung bestehen die zu bestimmenden Unbekannten aus der Geschwindigkeit im Schwerpunkt des betrachteten Kontrollvolumens und den Geschwindigkeiten in den Schwerpunkten der Nachbarelemente [1].

Die noch bestehende Zeitableitung in den Gleichungen kann ebenfalls diskretisiert werden. Die denkbar einfachste Möglichkeit ist die Verwendung des expliziten Einschrittverfahrens nach Euler (s. Gl. 5.13).

$$\frac{u_{i,k}^{n+1} - u_{i,k}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{V_{i,k}} \sum_{l=1}^4 (f_{x,l} \cdot O_{x,l} + f_{z,l} \cdot O_{z,l})_{i,k}^n - c \quad (5.13)$$

Das nun vorliegende Gleichungssystem ist entkoppelt. Nach Vorgabe des Startwertes $u_{i,k}^0$ für jedes Volumenelement kann die Unbekannte jeweils zum nächsten Zeitpunkt Schritt für Schritt aus den Ergebnissen des vorangegangenen Zeitschrittes berechnet werden [1].

Eine weitere Möglichkeit ist die Benutzung des impliziten Eulerverfahrens (s. Gl. 5.14).

$$\frac{u_{i,k}^{n+1} - u_{i,k}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{V_{i,k}} \sum_{l=1}^4 (f_{x,l} \cdot O_{x,l} + f_{z,l} \cdot O_{z,l})_{i,k}^{n+1} - c \quad (5.14)$$

Das implizite Eulerverfahren verwendet unbekannte Lösungsvariablen des Zeitschritts $n + 1$. Daher muss bei jedem Schritt ein gekoppeltes algebraisches Gleichungssystem gelöst werden. Implizite Verfahren werden dennoch in der Praxis aufgrund ihrer Stabilität und Genauigkeit eingesetzt [3]. In Kap. 7 werden die beiden Eulerverfahren und weitere Verfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen detaillierter erörtert.

5.3 Anwendung der FVM auf Diff.-gleichung 2. Ordnung

Das im vorherigen Kap. beschriebene Beispiel zeigt die Anwendung der FVM bei Betrachtung einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Die Impulsgleichungen (vgl. Gl. 3.24-3.26) enthalten jedoch auch Ableitungen zweiter Ordnung. Es gilt die Frage zu klären, welche Modifikationen oder weiteren Schritte zu machen sind, um Differentialgleichungen 2. Ordnung mit der FVM zu diskretisieren. Dazu betrachte man die instationäre Poissongleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c = 0 \quad (5.15)$$

mit der Unbekannten u . Die Anwendung sämtlicher Schritte der FVM, die (abgesehen von der Zeitdiskretisierung) im vorherigen Kapitel dargestellt sind, führt zu [1]:

$$\frac{du_{i,k}}{dt} + \frac{1}{V_{i,k}} \sum_{l=1}^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_l \cdot O_{x,l} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_l \cdot O_{z,l} \right)_{i,k} + c = 0 \quad (5.16)$$

Offensichtlich sind in Gl. 5.16 noch Ableitungen, die die räumliche Änderung der Variable u auf dem Rand beschreiben, vorhanden. Es besteht die Möglichkeit, auch diese Ableitung mit Hilfe der Variablen u im Schwerpunkt des betrachteten Volumenelements und u im Schwerpunkte des Nachbarelements approximativ auszudrücken [11] (s. Gl. 5.17).

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{l=1} = \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k}}{\Delta x} \quad (5.17)$$

Δx beschreibt dabei den Abstand der Schwerpunkte zweier benachbarter Elemente.

Zur Berechnung der Ableitung sind Methoden höherer Ordnung unter Verwendung von Variablen weiterer Nachbarn möglich (s. [3]).

5.4 Randbedingungen bei Verwendung der FVM

Um die Randbedingungen zu erfüllen, wird jeweils an jedem Rand eine zusätzliche Reihe von Elementen jenseits des Randes erzeugt (s. Abb. 5.3). Der zusätzlichen Reihe wird der Index 0 zugewiesen. Die Strömungsgrößen in den Schwerpunkten dieser Elemente werden nicht über die Erhaltungsgleichungen berechnet, sondern vorgegeben. Ist beispielsweise die Haftbedingung $\vec{u} = \vec{0}$ (Dirichlet-Randbedingung) an einem Rand gefordert, so wird dem Element mit Index 0 die Geschwindigkeit $u_{i,1}^{\vec{}}$ des Elements mit Index 1 mit umgekehrten Vorzeichen zugeordnet. Die Geschwindigkeit auf dem Rand zwischen den beiden Elementen (Rand des Strömungsfeldes) wird, wie zuvor beschrieben, durch die Mittelung der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte berechnet. Gilt $u_{i,0}^{\vec{}} = -u_{i,1}^{\vec{}}$ beträgt die Geschwindigkeit des Randes

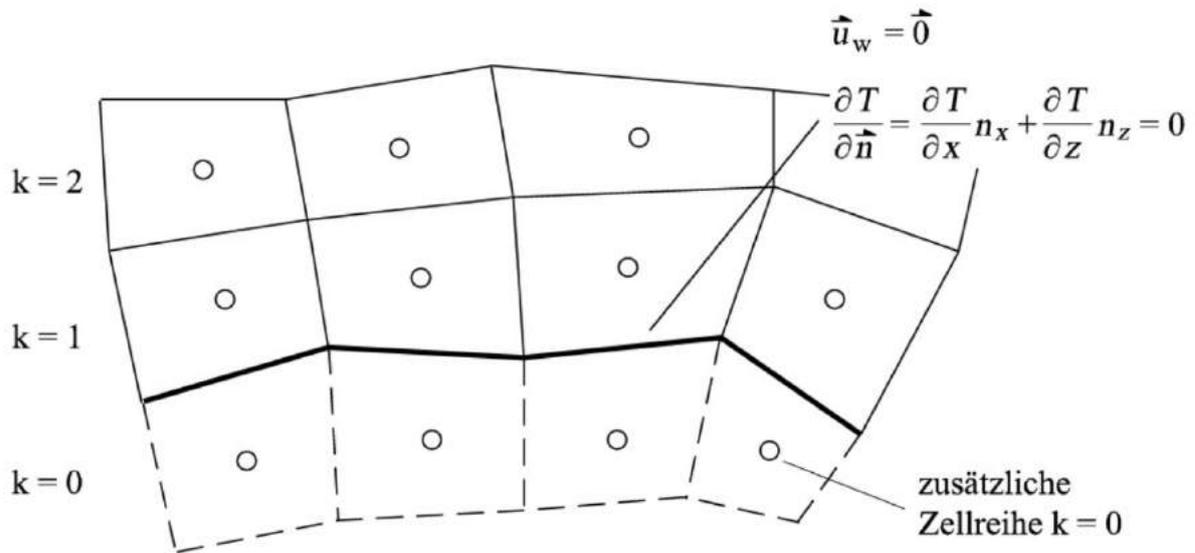


Abbildung 5.3: Zusätzliche Zellenreihe zur Erfüllung der Randbedingungen. Quelle: [1]

0 und erfüllt somit die Haftbedingung [1].

Soll der Fluss einer Strömungsgröße über den Rand verhindert werden, z. B. der Wärmeaustausch über den Rand, ist die (von-Neumann-) Randbedingung $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$ zu erfüllen. Zur Erfüllung dieser ist dem Element $(i,0)$ der Wert der Strömungsgröße des Elementes $(i,1)$ zuzuweisen [1].

6 Lösung algebraischer Gleichungssysteme

6.1 Vorüberlegung

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, ist es möglich, die Erhaltungsgleichungen, welche ein partielles Differentialgleichungssystem ergeben, unter Einsatz gewisser Approximationen in ein System algebraischer Gleichungen umzuformen. Dieses System ist ggf. nicht entkoppelt. Es gilt, die Unbekannten (die Strömungsgrößen) des algebraischen Gleichungssystems zu bestimmen.

Das Gleichungssystem besitzt eine hohe Anzahl von Gleichungen sowie Unbekannten. Weiterhin ist das System innerhalb einer Strömungssimulation in jedem Zeitschritt, d. h. insgesamt in bestimmten Fällen bis zu 10^6 mal zu lösen. Folglich ist es von großer Wichtigkeit, das System möglichst effizient zu lösen [3].

6.2 Direkte Methoden

Direkte Methoden wie das Gaußverfahren oder Varianten des Gaußverfahrens, wie z. B. die LU-Faktorzerlegung, bieten zwar die exakte Lösung linearer Gleichungssysteme, sind jedoch insbesondere bei dünn besetzten Matrizen verhältnismäßig zeitaufwändig [3]. Für nichtlineare Gleichungssysteme sind sie nicht zu verwenden, weshalb ohnehin weitere Methoden erörtert werden müssen. Für Informationen über direkte Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme wird auf [3] verwiesen.

6.3 Iterative Methoden

Iterative Methoden bieten Näherungslösungen von Gleichungssystemen. Der Diskretisierungsfehler ist in der Regel jedoch weitaus größer als der Fehler der iterativen Lösungsmethode. Dementsprechend nimmt man den weiteren „kleinen“ Fehler zu Gunsten der Effizienz der iterativen Methoden in Kauf. Für nichtlineare Systeme werden in vielen Fällen iterative Methoden in Verbindung mit weiteren Verfahren, wie z. B. dem Newton-Verfahren, benutzt [3].

6.3.1 Das Gauss-Seidel-Verfahren (GSV)

Das Gauss-Seidel-Verfahren ist eine iterative Methode zur Lösung beliebiger linearer (algebraischer) Gleichungssysteme. Es wird in der Praxis häufig in Verbindung mit Mehrgittermethoden (s. Kap. 6.3.2) für Strömungsprobleme eingesetzt.

Zur Erörterung des Verfahrens wird von folgendem Gleichungssystem ausgegangen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Zur Anwendung des GSV wird jede Zeile i ($i = 1, 2, \dots, n$) des Systems nach der Unbekannten x_i aufgelöst. Für jede Zeile i gilt dann:

$$x_i = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j + b_i \right) \cdot \frac{1}{a_{i,i}} \quad (6.2)$$

Vor dem ersten Iterationsschritt werden sämtliche Unbekannte x_1 bis x_n mit einem beliebigen Startwert belegt. Daraufhin beginnen die Iterationsschritte $k = 1, 2, \dots, m$, in denen jeweils die Unbekannte $x_i^{(k+1)}$ durch im selben Schritt bereits bestimmte Lösungsvariablen bzw. Lösungsvariablen des vorherigen Schrittes berechnet werden (s. Gl. 6.3 [12], [13]).

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} + b_i \right) \cdot \frac{1}{a_{i,i}} \quad (6.3)$$

Die Variable x_i wird solange durch Gl. 6.3 neu belegt, bis die Differenz $x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$ zweier Iterationsschritte im Betrag kleiner geworden ist als eine festgelegte Fehlerschranke (Residuenorm).

Das GSV basiert auf dem Jacobi-Verfahren (JV) [12], [13]. Der Unterschied gegenüber dem GSV besteht darin, dass beim Jacobi-Verfahren die Berechnung von $x_i^{(k+1)}$ ausschließlich durch die Variablen des vorangegangenen Iterationsschrittes durchgeführt wird (s. Gl. 6.4).

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} + b_i \right) \cdot \frac{1}{a_{i,i}} \quad (6.4)$$

Das JV muss in jedem Schritt Variablen zweier Iterationsschritte speichern, benötigt daher doppelt so viel Speicherplatz.

Ggf. liegen nichtlineare Gleichungssysteme vor. Diese müssen zunächst durch Approximationen linearisiert werden. Dies kann u. a. mit Hilfe des Newton-Verfahrens (s. [14]) geschehen. Das linearisierte Gleichungssystem kann dann wie oben beschrieben gelöst werden [3].

6.3.2 Mehrgitter-Methoden (Multigrid-Methods (MG))

Mehrgittermethoden sind selbst keine Löser von Gleichungssystemen. MG sind Verfahren, die darauf abzielen, die Konvergenz von iterativen Lösern (z. B. dem GSV) zu beschleunigen. D. h., MG vermindern die Anzahl an Iterationsschritten des Löser und machen ihn folglich effizienter.

Die MG verfahren dabei folgendermaßen: Nach wenigen Iterationsschritten auf einem Gitter eines bestimmten Diskretisierungsgrades werden die noch nicht annähernd genau genug bestimmten Lösungs-

variablen auf ein wesentlich gröberes Gitter übertragen. Mehrere Gitterzellen fallen nun in den Bereich einer Gitterzelle. Dementsprechend müssen sämtliche Lösungsvariablen dieser Zellen durch Glättung zu Variablen einer Zelle zusammengefasst werden. Die Iterationsschritte werden dann auf dem gröberen Gitter um eine bestimmte Anzahl fortgesetzt. Der Aufwand auf einem doppelt so groben Gitter beträgt im Raum nur $\frac{1}{8}$ des Aufwandes auf dem feinen Gitter. Zusätzlich konvergiert das GSV auf dem gröberen Gitter 4 mal so schnell [3]. Ist eine bestimmte Anzahl an Iterationen auf dem groben Gitter ausgeführt worden, werden die Lösungsvariablen wieder auf das feine Gitter übertragen. Die Lösungsvariable einer Gitterzelle auf dem groben Gitter wird der Gitterzelle im Zentrum des Bereichs auf dem feinen Gitter zugeordnet. D. h. die Gitterzellen zwischen den Zentren sind zunächst nicht mit Variablen belegt. Diese Variablen können jedoch durch Interpolation zwischen den Variablen der Zentren ermittelt werden. Jetzt sind nur noch wenige weitere Iterationsschritte nötig, bis Konvergenz eintritt, also die Differenz der Variablen zweier Iterationsschritte die Residuennorm unterschritten hat. Man nutzt folglich das grobe Gitter, um eine hohe Anzahl von Iterationsschritten auf dem feinen Gitter durch eine kleinere Anzahl von schneller durchführbaren Schritten zu ersetzen.

Zum Vergleich: Zur Lösung der 2D-Laplace-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen auf einem 64×64 Gitter braucht das GSV ca. 4500 Schritte, um eine Approximation zu finden, die die wahre Lösung bis auf einen Fehler (Residuennorm) von 10^{-5} annähert. Unter Einsatz einer Mehrgitter-Methode (auf Basis des GSV) bei gleichen Bedingungen sind nur ca. 280 notwendig [3].

Aufgrund der Effizienz der MG benutzt auch OPENFOAM Mehrgitter-Methoden im Zusammenhang mit dem Gauß-Seidel-Verfahren.

7 Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

7.1 Allgemeines

Die Impulsgleichungen von instationären Strömungen beinhalten, wie bereits bekannt (vgl. Gl. 3.24-3.26), neben räumlichen Ableitungen auch eine Ableitung nach der Zeit, die diskretisiert werden muss. In Kap. 5.2 wurden im Zusammenhang mit der Diskretisierung der instationären, zweidimensionalen Differentialgleichung erster Ordnung das explizite und das implizite Eulerverfahren bereits vorgestellt. Die beiden Verfahren sollen im Folgendem detaillierter beschrieben werden. Zusätzlich werden weitere Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erörtert. Zur Beschreibung der Verfahren wird das allgemeine Anfangswertproblem¹ [3]

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)) ; \phi(t_0) = \phi^0 \quad (7.1)$$

betrachtet. Gesucht ist die Funktion $\phi(t)$. Zur numerischen Lösung der Differentialgleichung wird die Zeit diskretisiert. D. h., es sind nur noch die Funktionswerte von ϕ an den diskreten Zeitpunkten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ gesucht. Dabei soll vereinfacht gelten, dass $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. $\phi(t_0)$ ist durch die Anfangsbedingung bekannt. Bei Wahl eines ausreichend kleinen Zeitintervalls Δt bilden alle im Folgenden vorgestellten Verfahren eine gute Approximation für den zeitlichen Verlauf von ϕ [3]. Eine sinnvolle Wahl des Zeitintervalls hängt vom benutzten Verfahren und von der Problemstellung ab.

7.2 Die Eulerverfahren und weitere 2-Ebenen-Methoden

Da $f(t, \phi(t))$ in Gl. 7.1 der infinitesimal kleinen zeitlichen Veränderung von ϕ entspricht, ist anzunehmen, dass $f(t, \phi(t))$ auch approximativ die Veränderung von ϕ in einem kleinen Zeitintervall Δt beschreibt (s. Gl. 7.2). Dabei gibt es die Möglichkeiten, $f(t, \phi(t))$ an der zu berechnenden Stelle t_n oder am nächsten Zeitpunkt $t_n + \Delta t$ auszuwerten. Berechnet man die Funktion an der Stelle t_n , so spricht man vom expliziten Eulerverfahren² (s. Gl. 7.2).

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = f(t_n, \phi^n) \Leftrightarrow \phi^{n+1} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \cdot \Delta t \quad (7.2)$$

Nach Einsetzen der Anfangsbedingung sind jeweils im jedem Zeitschritt alle Größen auf der rechten Seite der Gl. 7.2 bekannt, sodass ϕ^{n+1} jeweils direkt berechnet werden kann. Wird die Funktion $f(t, \phi(t))$

¹Die räumlich diskretisierten Impulsgleichungen gehören jeweils zu dieser Gruppe.

²Dieses Verfahren wird auch Euler-Vorwärts-Methode genannt.

jeweils im Zeitschritt $t_n + \Delta t$ ausgewertet, liegt das implizite Eulerverfahren³ vor (s. Gl. 7.3).

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) \Leftrightarrow \phi^{n+1} = \phi^n + f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) \cdot \Delta t \quad (7.3)$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält den unbekanntem Funktionswert des Zeitpunktes t_{n+1} . Folglich kann ϕ^{n+1} nicht explizit berechnet werden. Die Gleichung muss durch Approximationen oder iterative Verfahren gelöst werden [3].

Die Eulerverfahren gehören zu den 2-Ebenen-Methoden, da sie zur Berechnung des nächsten Zeitschritts jeweils Funktionswerte von ϕ an zwei Stellen benutzen. Weitere 2-Ebenen-Methoden, wie beispielsweise die Mittelpunktsregel [3], sind denkbar. Die Mittelpunktsregel verwendet die Funktionswerte von $f(t, \phi(t))$ des Zeitpunktes $t_n + \frac{1}{2}\Delta t$, der genau zwischen t_n und t_{n+1} liegt (s. Gl. 7.4).

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta t \quad (7.4)$$

Ebenfalls ist es möglich, den Mittelwert der Funktionswerte von $f(t, \phi(t))$, ausgewertet an den Stellen t_n und t_{n+1} , zu benutzen. Dies führt zur Trapezregel [3] (s. Gl. 7.5).

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} \cdot (f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi^{n+1})) \cdot \Delta t \quad (7.5)$$

Die beiden zuletzt genannten Verfahren verwenden einen im Vorfeld unbekanntem Funktionswert, sind somit ebenfalls implizit. Die Mittelpunktsregel und die Trapezregel sind Verfahren zweiter Ordnung, da gezeigt werden kann, dass der Fehler, den sie produzieren, proportional zu $(\Delta t)^2$ ist [3]. Sie liefern bei ausreichend kleinem Zeitintervall Δt gegenüber Methoden 1. Ordnung (den Eulerverfahren) genauere Approximationen der Lösung.

Nun stellt sich die Frage, weshalb in bestimmten Fällen der Aufwand betrieben wird, in jedem Zeitschritt iterativ oder durch Vereinfachungen die Gleichung eines impliziten Verfahrens zu lösen, anstatt ein explizites Verfahren zu benutzen, welches diesen zusätzlichen Aufwand nicht fordert. Die unterschiedliche Stabilität der Verfahren liefert die Antwort auf diese Frage.

Eine Methode ist dann stabil, wenn sie eine beschränkte numerische Lösung liefert [3]. Das explizite Eulerverfahren ist nur bedingt stabil, d. h. es liefert nur für ausreichend kleine Zeitschritte eine beschränkte Lösung. Die oben beschriebenen impliziten Verfahren sind dagegen bedingungslos stabil. Auch wenn die impliziten Verfahren immer eine beschränkte Lösung zeigen, ist diese nicht immer auch eine physikalisch plausible Lösung.

Bei Wahl eines ausreichend kleinen Zeitschritts sind alle Verfahren geeignet. Die Wahl eines kleinen Zeitschritts bedeutet jedoch, dass insgesamt bei gleicher Simulationsdauer eine höhere Anzahl von Schritten berechnet werden muss. Dies kostet insbesondere bei langen Simulationszeiten Rechenzeit, die man vermeiden möchte. Hier sind implizite Verfahren besser geeignet, da sie verhältnismäßig größere Zeitintervalle zulassen [3].

³Dieses Verfahren wird auch Euler-Rückwärts-Methode genannt.

7.2.1 Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL-Bedingung)

Die CFL-Zahl beschreibt die Anzahl der Gitterzellen, die ein Fluid in einem Zeitschritt Δt durchschreitet. Für eindimensionale Strömung lautet die CFL-Zahl [3]

$$CFL = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}. \quad (7.6)$$

Bei Verwendung des expliziten Eulerverfahrens ist die CFL-Zahl ein Maß für die Stabilität des Verfahrens. Ist die Zahl größer als 1, ist das explizite Eulerverfahren instabil. Damit ergibt sich die Bedingung für die Zeitschrittweite

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}. \quad (7.7)$$

Wird diese Bedingung eingehalten, ist Stabilität des Verfahrens gewährleistet [3].

7.3 Prädiktor-Korrektor-Methoden (PKM)

Implizite Methoden sind zwar stabiler als ihre expliziten Alternativen, fordern aber die iterative Berechnung einer Gleichung oder ggf. (z. B. bei Anwendung der FVM auf ein Strömungsproblem) eines Gleichungssystems. Das Ziel der Prädiktor-Korrektor-Methoden ist es, die Vorteile beider Verfahrensguppen zu kombinieren [3].

Die klassische PKM geht dabei folgendermaßen vor:

Eine vorläufige Lösung ϕ^{n+1*} wird durch die Euler-Vorwärts-Methode geschätzt (s. Gl. 7.8).

$$\phi^{n+1*} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \cdot \Delta t \text{ (Prädiktorschritt)} \quad (7.8)$$

Unter Verwendung der geschätzten Lösung und der Trapezregel wird dann eine korrigierte Lösung ϕ^{n+1} bestimmt (s. Gl. 7.9).

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} \cdot (f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi^{n+1*})) \cdot \Delta t \text{ (Korrektorschritt)} \quad (7.9)$$

Diese Methode ist von 2. Ordnung. Es können auch Methoden höherer Ordnung durch das Einsetzen von weiteren Zeitpunkten aus vorherigen Schritten oder zwischen t_n und t_{n+1} erzeugt werden. Nutzt man Zeitpunkte aus der Vergangenheit, so spricht man von Mehrpunkte-Methoden. Diese haben den Nachteil, dass die ersten Schritte des Verfahrens eine Sonderbehandlung erhalten müssen, da hier ggf. nicht genug vorherige Zeitschritte vorhanden sind, um die Mehrpunkte-Methode auszuführen. Siehe [3] für weitere Informationen über diese Verfahren.

Methoden, die zusätzliche Zeitpunkte zwischen t_n und t_{n+1} zur Hilfe nehmen, werden Runge-Kutta-Methoden genannt [3].

7.4 Runge-Kutta-Methoden (RKM)

Die einfachste RKM ist von 2. Ordnung. Hierzu wird eine abgeschätzte Lösung $\phi^{n+\frac{1}{2}*}$ bei $t_n + \frac{1}{2}\Delta t$ bestimmt. Diese Lösung wird dann genutzt, um eine korrigierte Lösung ϕ^{n+1} mit Hilfe der Mittelpunktsregel zu

berechnen (s. Gl. 7.10 und Gl. 7.11).

$$\phi^{n+\frac{1}{2}*} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (7.10)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \left(f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}*}\right) \right) \cdot \Delta t \quad (7.11)$$

Im Gegensatz zu den Mehrpunkte-Methoden haben die RKM den Vorteil, dass sie auch für die ersten Zeitschritte anwendbar sind. Sie sind folglich selbststartend [3].

Die RKM 4. Ordnung wird in vielen Fällen in der Praxis eingesetzt. Diese enthält jeweils zwei Prädikator- und zwei Korrektorschritte. Zunächst wird eine Lösung $\phi^{n+\frac{1}{2}*}$ bei $t_{n+\frac{1}{2}}$ vorgeschätzt. Als zweiter Schritt folgt die Korrektur von ϕ an der Stelle $t_{n+\frac{1}{2}}$ durch die Mittelpunktsregel und führt zur Lösung $\phi^{n+\frac{1}{2}**}$. Die bereits korrigierte Lösung $\phi^{n+\frac{1}{2}**}$ wird dann verwendet, um eine weitere Lösung ϕ^{n+1*} zu schätzen. Als letzter Schritt folgt ein Simpson-Regel-Endkorrektor, der alle bereits bestimmten Lösungen verwendet, um die endgültige Lösung ϕ^{n+1} zu bestimmen (s. Gl. 7.12 - Gl. 7.15) [3].

$$\phi^{n+\frac{1}{2}*} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (7.12)$$

$$\phi^{n+\frac{1}{2}**} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}*}\right) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (7.13)$$

$$\phi^{n+1*} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}**}\right) \cdot \Delta t \quad (7.14)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \left[f(t_n, \phi^n) + 2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}*}\right) + 2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}**}\right) + f(t_{n+1}, \phi^{n+1*}) \right] \cdot \frac{\Delta t}{6} \quad (7.15)$$

Runge-Kutta-Methoden benötigen gegenüber den bisher vorgestellten Methoden mehr Rechenzeit für einen Zeitschritt. Sie sind allerdings stabiler und genauer und werden daher gerne in der Praxis eingesetzt. Es existieren RKM 5. Ordnung, die durch einen zusätzlichen Schritt eine Fehlerabschätzung bzw. Fehlerkontrolle erlauben [3]. RKM 5. Ordnung sind u. a. in der Software OPENFOAM implementiert.

8 Die SIMPLE-Methode

Betrachtet werden die in Kap. 3 hergeleiteten Erhaltungsgleichungen für inkompressible, isotherme Strömungen newtonscher Fluide.

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0 \quad (8.1)$$

Impulsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (8.4)$$

Wie in Kap. 3 angesprochen, ist die Kontinuitätsgleichung nicht als eigenständige Gleichung, sondern als Nebenbedingung der Impulsgleichungen anzusehen, da diese bereits zur Herleitung der Impulsgleichungen verwendet wurde. Die oben dargestellten Erhaltungsgleichungen bilden also ein System von 3 „echten“ Gleichungen mit den 4 Unbekannten u, v, w und p bzw. $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ unter einer Nebenbedingung, die ausschließlich u, v, w betreffen [1], [3]. Die SIMPLE¹-Methode ist u. a. ein iteratives Verfahren zur Lösung dieses Gleichungssystems. Für die Zeitdiskretisierung der Impulsgleichungen wird dabei ein explizites (hier beispielsweise die Euler-Vorwärts-Methode²) Verfahren verwendet (s. Gl. 8.5 bzw. Gl. 8.6³ [1]. Dies führt zu:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y}(v^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial z}(w^{n+1}) = 0 \quad (8.5)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u^n}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^n}{\partial x} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (8.6)$$

Durch die Verwendung des Druckes aus dem vorangegangenen Zeitschritt, erfüllen $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ nicht die Kontinuitätsgleichung. Daher wird der Druck des Schrittes $n + 1$ in die Impulsgleichungen eingesetzt.

¹SIMPLE: Semi implicit method for pressure linked equations

²Andere explizite Methoden wie die Runge-Kutta-Methoden sind ebenfalls möglich.

³Aus Platzgründen ist nur die Impulsgleichung für die x-Richtung dargestellt. Die übrigen Impulsgleichungen gestalten sich analog.

Dies führt zu einer semi-impliziten Behandlung der Impulsgleichungen (s. Gl. 8.7 bzw. Gl. 8.8).

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (v^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial z} (w^{n+1}) = 0 \quad (8.7)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u^n}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (8.8)$$

Um das System zu lösen, wird es zunächst, z. B. mit Hilfe der FVM (siehe. Kap. 5) räumlich diskretisiert. Der SIMPLE-Algorithmus führt dann folgendermaßen zur endgültigen numerischen Lösung [1], [3]:

1. Die jeweils aus dem vorangegangenen Schritt oder aus der Anfangsbed. bekannten Geschwindigkeiten u^n, v^n, w^n sowie eine Schätzung des Drucks p^{n+1*} werden in die Impulsgleichungen eingesetzt.
2. Die Geschwindigkeiten $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ werden berechnet und in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt.
3. Ist die Kontinuitätsgleichung näherungsweise erfüllt bzw. liegt der Fehler b unterhalb einer gewissen Fehlerschranke, ist ein Iterationsschritt abgeschlossen. Es kann zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten und des Drucks des folgenden Zeitpunktes wieder bei Schritt 1 begonnen werden.
4. Ist der Fehler b dagegen zu groß, wird der Druck-Korrektor p' berechnet. Dieser kann über die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 p' = -b \quad (8.9)$$

bestimmt werden. Die Summe aus p^* und p' bildet die Schätzung des Druckes im nächsten Versuch. Es wird wieder bei Schritt 1 unter Verwendung der neuen Schätzung begonnen.

Die Software OPENFOAM verwendet u. a. den SIMPLE-, sowie den PISO-Algorithmus. Der PISO-Algorithmus ist eine erweiterte Variante des SIMPLE-Verfahrens. Für weitere Informationen über diese Algorithmen wird auf [3], [1] verwiesen.

9 Turbulente Strömungen

9.1 Allgemeines

In laminaren Strömungen sind geordnete Stromlinien sehr gut sichtbar. Hier tritt wenig bis gar kein Energieaustausch zwischen den Stromlinien auf. Dagegen treten in turbulenten Strömungen zu einem erheblichen Anteil Wirbelstrukturen auf, die aus Schwankungen der Strömungsgrößen entstehen. Diese

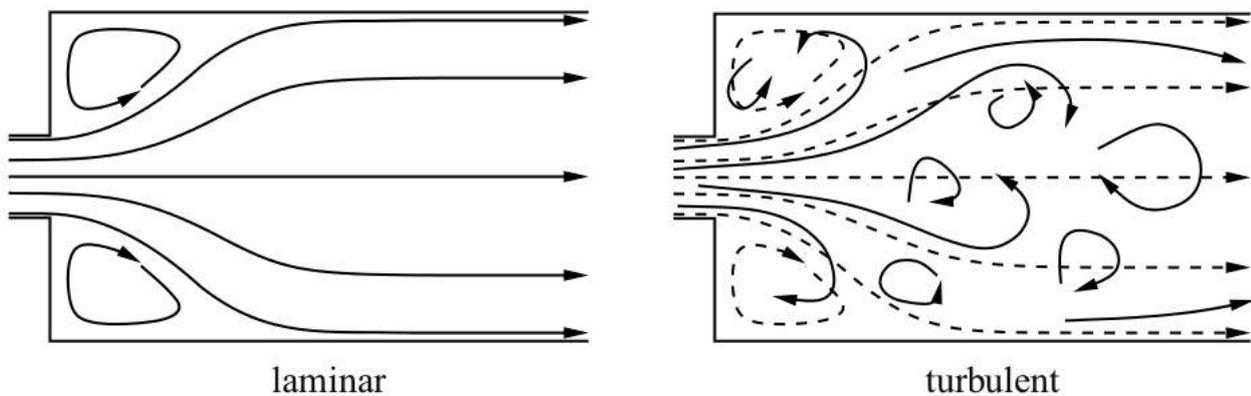


Abbildung 9.1: Rohrströmung. Laminar (links) und turbulent (rechts). Quelle: [2]



(a) Düsenstrahl im Rohr.



(b) Wirbelsturm in der Jupiteratmosphäre.

Abbildung 9.2: Turbulente Strömungen. Quelle: [4], [2]

Schwankungen sind nur stochastisch beschreibbar. Der exakte Verlauf der Schwankungen ist daher nicht

vorhersehbar. Turbulenz bedeutet u. a. Durchmischung, Verteilung bzw. Diffusion von Energie [4]. Energieaustausch oder Durchmischung findet in turbulenten Strömungen in allen drei Dimensionen statt. Daher sind zweidimensionale Strömungs- bzw. Turbulenzmodelle stets als Vereinfachung der realen Gegebenheiten anzusehen [2].

Turbulenz tritt erst dann auf, wenn Störungen in eine (noch nicht turbulente) Strömung eingebracht werden. Turbulenz kann z. B. durch Wandreibung oder Reibung an Scherströmungen induziert werden [4]. Der Grad der Turbulenz kann über die Reynoldszahl beschrieben werden. Je höher die Reynoldszahl, desto intensiver treten im Allgemeinen Fluktuationen, Schwankungen und Energieaustausch in der Strömung auf. D. h. die Strömung wird mit höherer Reynoldszahl turbulenter. Die Reynoldszahl ist allgemein folgendermaßen definiert [2]:

$$Re = \frac{u_\infty \cdot l_{ref}}{\nu} \quad (9.1)$$

Dabei ist u_∞ eine Referenzgeschwindigkeit, z. B. die Geschwindigkeit am Einlass eines Strömungsfeldes. l_{ref} ist eine Referenzlänge. Bei der Umströmung eines Körpers kann das z. B. eine Seitenlänge des Körpers sein. ν beschreibt die kinematische Viskosität des strömenden Fluids. In welchem Bereich eine Strömung laminar ist, bzw. wann sie in eine turbulente Strömung übergeht, ist vom Strömungsszenario abhängig. Bei der Kreiszyylinderumströmung treten ab einer Reynoldszahl von ca. 200 turbulente Strukturen auf [16], [15]. Abb. 9.3 zeigt die Geschwindigkeit eines Punktes in einer Rohrströmung bei verschiedenen Reynoldszahlen. Durch die steigende Intensität und Quantität von Fluktuationen mit höherer Reynoldszahl ist der Übergang der Strömung vom laminaren zum turbulenten Zustand sichtbar.

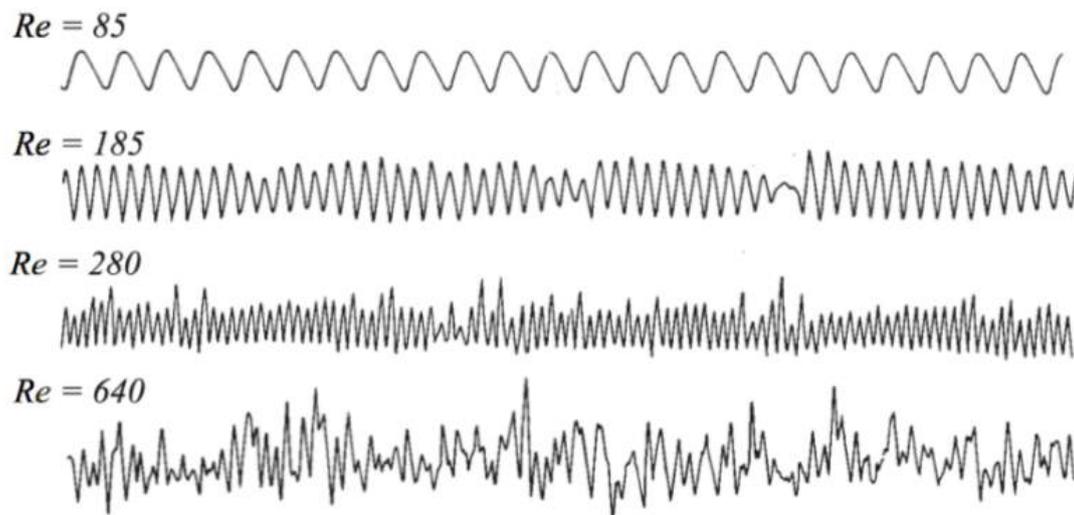


Abbildung 9.3: Geschwindigkeit eines Punktes in einer Rohrströmung bei verschiedenen Reynoldszahlen.
Quelle: [4]

Energiespektrum

Wirbel (turbulente Strukturen) treten in verschiedenen Größenordnungen auf.

- a) Große Skalen (Large scale/Integral scale): Turbulenz wird zunächst in Form von großen¹(energiereichen) Wirbeln z. B. durch Wandreibung in einer Rohrströmung induziert. Diese Wirbel sind anisotrop und inhomogen.
- b) Inertialbereich (Inertial subrange): Große Wirbel zerfallen in kleinere Wirbel, die dann wiederum in kleinere Wirbel zerfallen. Die Energie wird dabei auf die kleineren Wirbel übertragen. Umwandlung der Energie in Wärme findet noch nicht statt.
- c) Dissipative Skalen (Dissipation scale): Sind die Wirbellängen der Strukturen kleiner geworden als die Kolmogorov-Länge

$$L_k = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (9.2)$$

(ϵ entspricht hier der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie), dissipieren die Wirbel. Die Energie wird dabei in Wärme umgewandelt. Wirbel in dieser Skala sind hauptsächlich homogen und isotrop.

Abb. 9.4 zeigt den Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und Energie E einer turbulenten Struktur.

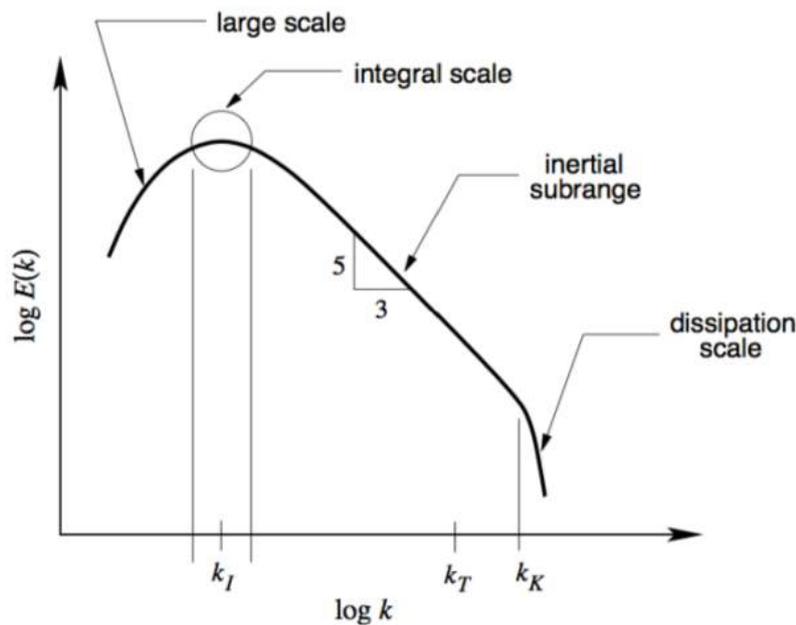


Abbildung 9.4: Energiespektrum von turbulenten Wirbeln. Quelle: [4]

¹Mit großen Wirbeln sind hier Wirbel gemeint, die eine große Wellenlänge und große Geschwindigkeitsfluktuationen aufweisen.

9.2 Möglichkeiten zur Modellierung von turbulenten Strömungen

9.3 DNS

Mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich alle Eigenschaften einer Strömung abbilden. Folglich können auch alle turbulenten Strömungen durch die Navier-Stokes-Gleichungen modelliert werden. Um die Eigenschaften einer Strömung korrekt zu reproduzieren, müssen jedoch auch die Strukturen der dissipativen Skala (siehe. vorheriges Unterkapitel) abgebildet werden. Dies kann nur dann geschehen, wenn die Zellgröße des numerischen Gitters mindestens so klein ist wie die Kolmogorov-Länge. Diese bewegt sich meist im Mikrometerbereich. Für Strömungsszenarien mit Ausdehnungen im unteren Meterbereich (Ausdehnung eines Windkanals) wären 10^6 Gitterpunkte in jeder Koordinatenrichtung, folglich 10^{18} Gitterpunkte insgesamt notwendig. Selbst bei Einsatz von Großrechnern ist der Rechen- und Speicheraufwand nicht tragbar. Weiterhin muss das Zeitintervall zwischen den Berechnungen von Zeitpunkten der Strömung aufgrund der Courant-Bedingung sehr klein gewählt werden. Dementsprechend zeitintensiv ist die Simulation².

Eine Simulation ohne Einsatz eines Turbulenzmodells wird DNS (Direct-Numerical-Simulation) genannt. DNS wird aufgrund des hohen Rechen- und Speicheraufwandes eher zu Forschungszwecken gebraucht, z. B. um die Phänomene der Turbulenz besser verstehen zu können. Mit neuen Erkenntnissen über die Turbulenz, gewonnen durch DNS-Simulationen, können und werden andere Turbulenzmodelle, die eher für praktische Zwecke genutzt werden, verbessert, kalibriert oder auch validiert [4], [1], [3], [2].

9.4 RANS

Reynolds-Average-Navier-Stokes-Equations (RANS) ist ein Modellansatz, der sich auf die Berechnung eines zeitlich gemittelten Wertes der Strömungsgrößen beschränkt. Dieser Ansatz kann dementsprechend viele Phänomene der Turbulenz nicht abbilden. Dennoch kann der Ansatz, je nachdem, welche Eigenschaften der Strömung untersucht werden sollen, diese hinreichend genau reproduzieren. Abb. 9.5 zeigt die Umströmung eines Quaders jeweils mit Hilfe einer direkten numerischen Simulation bzw. einer RANS-Simulation. Um die RANS-Gleichungen herzuleiten, wird zunächst jede Strömungsgröße³ $\varphi(\vec{x},t)$ in einen zeitlich gemittelten Wert $\bar{\varphi}(\vec{x})$ und eine Schwankung $\varphi'(\vec{x},t)$ um diesen Mittelwert geteilt. Es gilt also:

$$\varphi(\vec{x},t) = \bar{\varphi}(\vec{x}) + \varphi'(\vec{x},t) \quad (9.3)$$

Dabei lässt sich der Mittelwert mit Hilfe der Integration über ein genügend großes Zeitintervall Δt berechnen:

$$\bar{\varphi}(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta t} \varphi(\vec{x},t) dt \quad (9.4)$$

Sämtliche Strömungsgrößen werden nun in der Kontinuitäts- und in den Impulsgleichungen durch die Summe aus Mittelwert und Schwankung ersetzt.⁴ Dies ist hier exemplarisch für die Kontinuitätsgleichung

²Größenordnung: Monate

³Bei isothermen, inkompressiblen Strömungen sind die Strömungsgrößen $p(\vec{x},t)$, $u(\vec{x},t)$, $v(\vec{x},t)$, $w(\vec{x},t)$ zu betrachten.

⁴Bei nicht isothermen und/oder kompressiblen Strömungen gilt dies auch für die Energiegleichung.

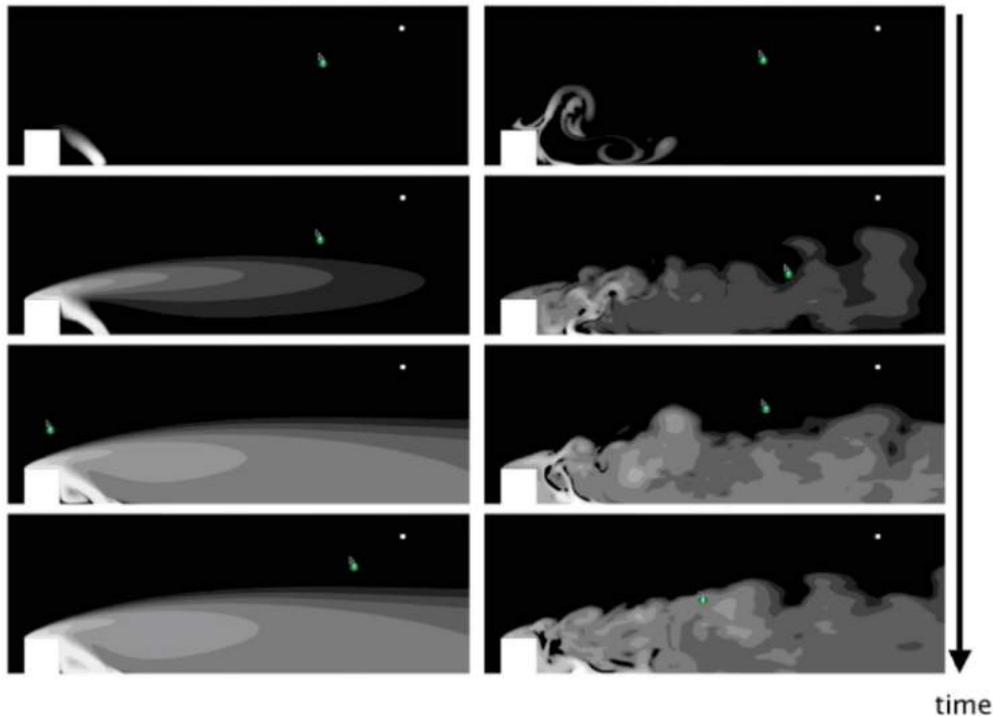


Abbildung 9.5: Vergleich einer RANS-Simulation (links) und einer DNS-Simulation (rechts). Quelle: [4]

getan worden:

$$\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w} + w')}{\partial z} = 0 \quad (9.5)$$

Jeder Term der betrachteten Gleichungen wird gemittelt. Wiederum ist dies exemplarisch für die Kontinuitätsgleichung getan worden:

$$\frac{\partial (\overline{\bar{u} + u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\bar{v} + v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{\bar{w} + w'})}{\partial z} = 0 \quad (9.6)$$

Berechnung der Mittelung ist gegenüber der Berechnung der Summation bzw. der Ableitung vertauschbar. Gl. 9.6 lässt sich also in folgende Gleichung umformen:

$$\frac{\partial (\bar{u} + \overline{u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + \overline{v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w} + \overline{w'})}{\partial z} = 0 \quad (9.7)$$

Der Mittelwert der Schwankung ist per Definition Null. Der Mittelwert des Mittelwerts ist der Mittelwert selbst. Man erhält folglich:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (9.8)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der ursprünglichen Kontinuitätsgleichung, jedoch bestehen die Unbekannten jetzt aus den zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten. Die linearen Terme der Impulsgleichungen bleiben ebenfalls nach Mittelung in ihrer Form identisch. Die Impulsgleichungen enthalten jedoch auch nichtlineare Terme, in denen die Schwankung φ' enthalten bleibt. Betrachtet wird beispielsweise der

Teilterm des nichtlinearen Anteils der Impulsgleichungen

$$\frac{\overline{\partial u^2}}{\partial x} = \frac{\overline{\partial (\bar{u} + u') \cdot (\bar{u} + u')}}{\partial x}. \quad (9.9)$$

Der Term lässt sich vereinfachen zu

$$\frac{\partial (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}. \quad (9.10)$$

Die Mittelung und die Potenzierung der Fluktuation u' lässt sich nicht vertauschen, sodass der zuletzt genannte Term nicht weiter vereinfacht werden kann. Dies bedeutet, dass die Fluktuation u' (bzw. v' und w') als Unbekannte in den Impulsgleichungen vorkommt. Die gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen für isotherme, inkompressible Strömungen lauten also [1]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (9.11)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho u'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u'w'} \right), \quad (9.12)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial^2 z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho v'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho v'w'} \right), \quad (9.13)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\bar{p}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial^2 z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho w'^2} \right), \quad (9.14)$$

Die Ableitung des Mittelwerts nach der Zeit $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$ wird in einigen Fällen in den Impulsgleichungen hinzugefügt, obwohl sie mathematisch Null entspricht. Einerseits ist die Ableitung bei der numerischen Integration hilfreich, andererseits kann eine turbulente Strömung auf einer langsamen Zeitskala (im Vergleich zu Perioden von Turbulenzfluktuationen) instationär sein. Die Ableitung hat folglich auch eine physikalische Bedeutung [1]. Das Gleichungssystem, das durch Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichungen aufgestellt wird, enthält folglich nun drei weitere Unbekannte u', v', w' , was die Lösung des System unmöglich macht [1].

Die zusätzlich entstandenen Terme, die auch als turbulente Spannungen oder Reynoldsspannungen bekannt sind, müssen durch weitere Überlegungen bestimmt werden.

Die Matrixnotation der Reynoldsspannungen lautet:

$$\underline{\tau_{Re}} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

Die Indexnotation der Reynoldsspannungen lautet, wenn gilt: $u = u_1; v = u_2; w = u_3$ bzw. $x = x_1; y = x_2; z = x_3$:

$$\tau_{Re,ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (9.16)$$

9.4.1 Die Boussinesq-Hypothese

Nach Boussinesq können die Reynoldsspannungen über eine turbulente Viskosität μ_t ausgedrückt werden:

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (9.17)$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (9.18)$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad \text{und} \quad (9.19)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ 1 & \text{wenn } i = j \end{cases} \quad (9.20)$$

Die turbulente Viskosität μ_t kann mit Hilfe diverser Modelle bestimmt werden. Sämtliche Modelle, die auf der Verwendung einer turbulenten Viskosität beruhen, setzen voraus, dass die Turbulenz als isotrop angesehen werden kann. Turbulenz ist in der Realität jedoch in der Regel anisotrop. Dennoch können diese Modelle die mittleren Strömungsgrößen in vielen Fällen hinreichend exakt berechnen. Die Turbulenzmodelle werden in folgende Modellklassen unterteilt: [1], [4]

- Nullgleichungsmodelle: Hier wird μ_t direkt in Abhängigkeit der Strömungsgrößen oder Ableitungen der Strömungsgrößen berechnet. Zu dieser Modellklasse gehören u. a. das Cebeci-Smith-Modell [4] und das Baldwin-Lomax-Modell [1].
- Eingleichungstransportmodelle: Diese Modelle gehen davon aus, dass Turbulenz an einer Stelle erzeugt wird, diese transportiert (konvektiert und/oder diffundiert) wird und an einer anderen Stelle dissipiert. Hierzu wird zusätzlich zu den Navier-Stokes-Gleichung eine Gleichung eingeführt, die die Eigenschaften von Erzeugung, Transport und Dissipation der Turbulenz beschreibt. Diese Gleichung muss wie die Navier-Stokes-Gleichungen in jedem Zeitschritt gelöst werden. Das Spalart-Allmaras-Modell ist z. B. ein Eingleichungstransportmodell [1].
- Zweigleichungstransportmodelle: Diese Modelle unterscheiden sich von den Eingleichungstransportmodellen durch die Verwendung einer weiteren (zusätzlichen) Gleichung, die die Erzeugung, Trans-

port und die Dissipation der Turbulenz beschreibt. Als Beispiele sind hier das k - ϵ -Modell und das k - ω -Modell zu nennen. Das k - ϵ liefert bei akzeptablem Berechnungsaufwand in vielen Strömungsszenarien ausreichend gute Ergebnisse. Weiterhin kann es als robust eingestuft werden, da es unempfindlich auf Veränderung von Randbedingungen im Einströmbereich reagiert [1].

Daher wird das k - ϵ -Modell in einer Großzahl von Anwendungen genutzt.

9.4.2 Das k - ϵ -Modell

Laut Turbulenztheorie ist es hinreichend, die Eigenschaften der Turbulenz durch zwei Parameter zu beschreiben. Dementsprechend wird die Turbulenz oft durch ein charakteristisches Zeit- und Längenmaß beschrieben [1].

Das k - ϵ -Modell benutzt den Parameter k , der die turbulente kinetische Energie (Intensität der Turbulenz) repräsentiert, und den Parameter ϵ , der die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie repräsentiert. Die Gleichung

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (9.21)$$

beschreibt die Berechnung der Wirbelviskosität μ_t über die beiden Parameter k und ϵ . C_μ ist eine empirische Konstante. k und ϵ selbst sind Lösungen eines Differentialgleichungssystems (mit zwei Gleichungen), welches Produktion, Konvektion, Diffusion und Dissipation der turbulenten Strukturen beschreibt [1]. Gl. 9.22 und Gl. 9.23 zeigen die beiden Gleichungen des Systems.

$$\rho \frac{k}{t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \epsilon \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\epsilon}{\partial x_j} - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9.23)$$

In Worten ausgedrückt müssten die Gleichungen 9.22 und 9.23 jeweils lauten:

$$\text{Konvektion} = \text{Produktion} + \text{Diffusion} - \text{Dissipation}$$

Die Modellparameter des *Standard- k - ϵ* -Modells sind so kalibriert worden, dass eine möglichst große Zahl an Strömungsszenarien gut abgebildet werden können [1]:

$$C_\mu = 0,09, \sigma_k = 1,0, \sigma_\epsilon = 1,3, C_{\epsilon 1} = 1,44, C_{\epsilon 2} = 1,92 \quad (9.24)$$

9.4.3 Turbulenz im Wandbereich

Nach Prandtl existieren aufgrund der Wandreibung zwei verschiedene Strömungsbereiche [17].

1. Die sogenannte Grenzschicht beschreibt die Strömungsschicht, die aufgrund ihrer unmittelbaren Nähe zur Wand reibungsbehaftet ist.
2. Im inneren Bereich der Strömung, d. h. in sämtlichen wandfernen Bereichen, die nicht zur Grenzschicht gehören, existiert eine reibungsfreie Strömung.

In der Grenzschicht herrscht ein erhöhter Impulsaustausch, der durch die Turbulenz an der Wand hervorgerufen wird. Dies führt dazu, dass die Geschwindigkeiten in dieser Schicht, trotz ihrer geringen Ausdehnung, stark variieren. An der Wand ist die Geschwindigkeit offensichtlich Null. Dann steigt sie innerhalb der Grenzschicht schnell an (s. Abb. 9.6). Aus der Tatsache, dass die Geschwindigkeit direkt an der Wand Null beträgt, muss folgen, dass es einen Bereich unmittelbar an der Wand gibt, dessen Geschwindigkeit so gering ist, dass die Strömung laminar verläuft. Dieser Bereich wird als viskose Unterschicht bezeichnet. Diese Schicht ist sogar im Verhältnis zur Grenzschicht klein. Um folglich Turbulenz im Wandbereich, die einen entscheidenden Einfluss auf die generelle Strömung haben kann, korrekt zu reproduzieren, muss die viskose Unterschicht in der numerischen Simulation abgebildet werden. D. h. Randzellen an Wänden müssen mindestens so klein sein wie die viskose Unterschicht [17].

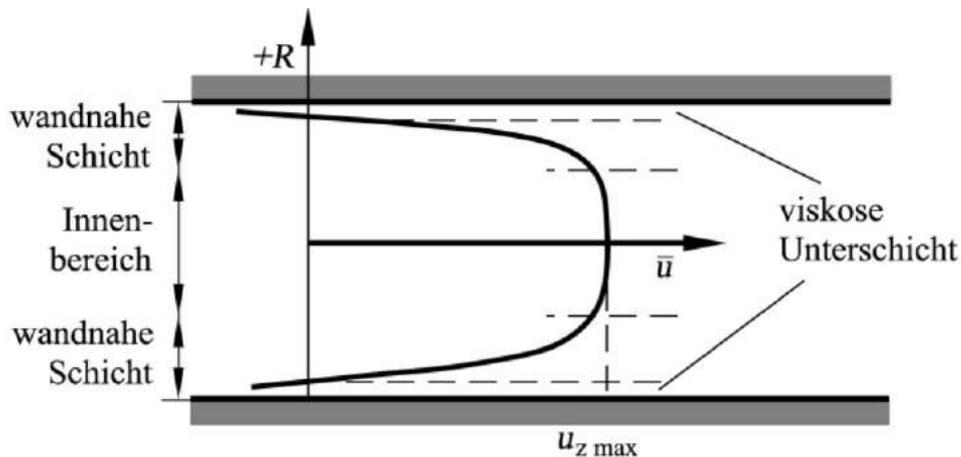


Abbildung 9.6: Universelles Geschwindigkeitsgesetz in einer Rohrströmung. Quelle: [1]

9.4.4 Wandfunktionen

Sehr kleine Zellen an den Wänden einzusetzen, bedeutet schon allein aufgrund der Courant-Bedingung bei einer RANS-Simulation einen erheblichen zusätzlichen Aufwand. Um diesen zusätzlichen Aufwand zu vermeiden, werden Geschwindigkeiten in der Grenzschicht, anstatt sie über die Navier-Stokes-Gleichungen zu ermitteln, durch sogenannte Wandfunktionen modelliert.

Hierfür wurden von Prandtl die dimensionslosen Größen Wandabstand [1]

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (9.25)$$

und Geschwindigkeit

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad (9.26)$$

mit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (9.27)$$

bzw.

$$\tau_w = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \tag{9.28}$$

eingeführt, um Resultate verschiedener Simulationen, unterschiedlicher Geometrie, Anströmgeschwindigkeit und Viskosität, vergleichen zu können.

Im Vergleich mit DNS-Simulationen und Experimenten hat sich gezeigt, dass die Einteilung der turbulenten Grenzschicht bei der Erstellung der Wandfunktion in drei Bereiche sinnvoll ist (siehe. Abb. 9.7). So wird der erste Bereich, die viskose Unterschicht (im Bereich von $0 < y^+ < 5$), durch die Wandfunktion

$$u^+ = y^+, \tag{9.29}$$

dagegen der logarithmische Bereich ($30 < y^+ < 350 - 800$ (s. Abb. 9.7)) durch die Funktion

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(y^+) + C \tag{9.30}$$

mit

$$\kappa \approx 0,4 \text{ und } C \approx 5,5 \tag{9.31}$$

modelliert [1]. Geschwindigkeiten im Übergangsbereich ($5 < y^+ < 30$) werden durch Interpolation ermittelt. Abb. 9.7 zeigt, dass die Wandfunktionen sehr gut das Geschwindigkeitsprofil, ermittelt durch

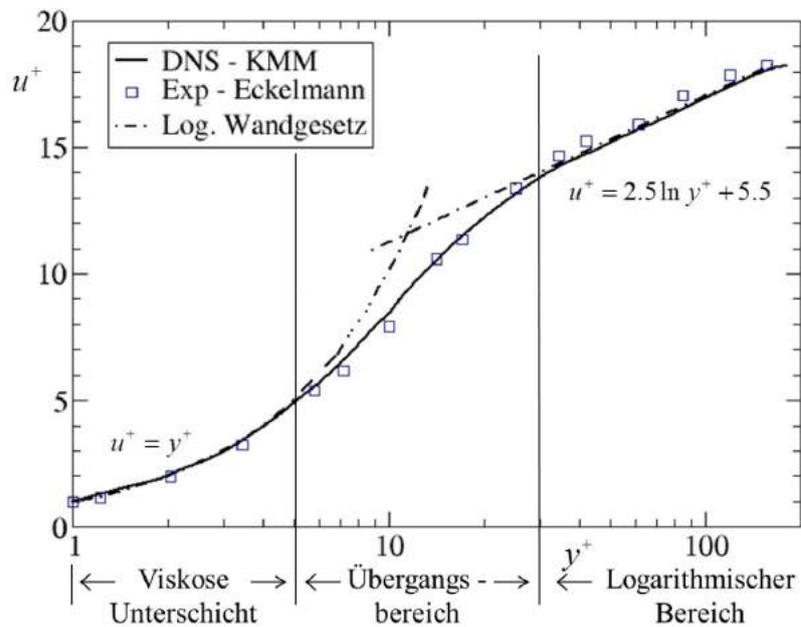


Abbildung 9.7: Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht. Quelle: [1]

Experimente und DNS-Simulationen, reproduzieren.

9.4.5 Reynoldsspannungsmodelle

Reynoldsspannungsmodelle greifen nicht auf die Verwendung einer Wirbelviskosität bzw. auf die Boussinesq-Hypothese zurück. Jede einzelne Reynoldsspannung τ_{ij} wird hier über eine separate Differentialgleichung bestimmt.

Es existieren neun Reynoldsspannungen. Aufgrund der Vertauschbarkeit der Indizes sind drei Spannung mit drei anderen identisch. Es werden folglich sechs Differentialgleichungen (zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen) benötigt, um sämtliche Reynoldsspannungen zu berechnen. Die Form der Gleichungen ist an die Impulsgleichung angelehnt. Sie lautet vereinfacht [2]:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \epsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right] \quad (9.32)$$

In Worten ausgedrückt lautet die Gleichung

$$\text{Konvektion} = - \text{Produktion (zwei Summanden)} - \text{Dissipation} + \text{Dilation} + \text{Diffusion}. \quad (9.33)$$

Die unbekanntenen Größen ϵ_{ij} , Π_{ij} und C_{ijk} werden in Abhängigkeit der Fluktuationen u' und p' modelliert (s. Gl. 9.34- 9.36).

$$\epsilon_{ij} = 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (9.34)$$

$$\Pi_{ij} = p' \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{u'_j}{\partial x_i} \right)} \quad (9.35)$$

$$C_{ijk} = \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i \delta_{ik}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}} \quad (9.36)$$

Reynoldsspannungsmodelle sind fähig, anisotrope turbulente Strukturen abzubilden [2], [1]. In bestimmten Strömungen liefert diese Fähigkeit entscheidene Vorteile. Diese Vorteile haben ihren Preis. Im Gegensatz zu den Zwei-Gleichungs-Transportmodellen müssen hier statt zwei sechs zusätzliche Gleichungen in jedem Zeitschritt gelöst werden. Der Rechenaufwand erhöht sich dementsprechend.

9.5 LES

Die Grobstruktursimulation (Large-Eddy-Simulation (LES)) ist neben der DNS und der RANS-Simulation eine Möglichkeit zur Modellierung von turbulenten Strömungen. Grobstruktursimulationen können turbulente Strömungen wesentlich detaillierter bzw. genauer reproduzieren als RANS-Simulationen [4]. Zur Erstellung einer LES-Modellierung ist ein höherer numerischer Aufwand zu führen (s. Abb. 9.8). Trotz des erhöhten numerischen Aufwands gewinnen LES-Simulationen immer mehr an Bedeutung, aufgrund der stetigen Weiterentwicklung von Hochleistungsrechnern. Wie bereits bekannt, werden turbulente Strukturen als große Wirbel produziert, zerfallen dann in kleinere Skalen und werden schließlich durch Reibung aufgezehrt (dissipieren), wenn ihre Größe kleiner geworden ist als die Kolmogorov-Länge. Die Idee, die sich hinter der Grobstruktursimulation verbirgt, besteht darin, die großskaligen Strukturen über die Navier-Stokes-Gleichungen abzubilden und die Wirbel, die kleiner sind als eine bestimmte Größe, zu modellieren.

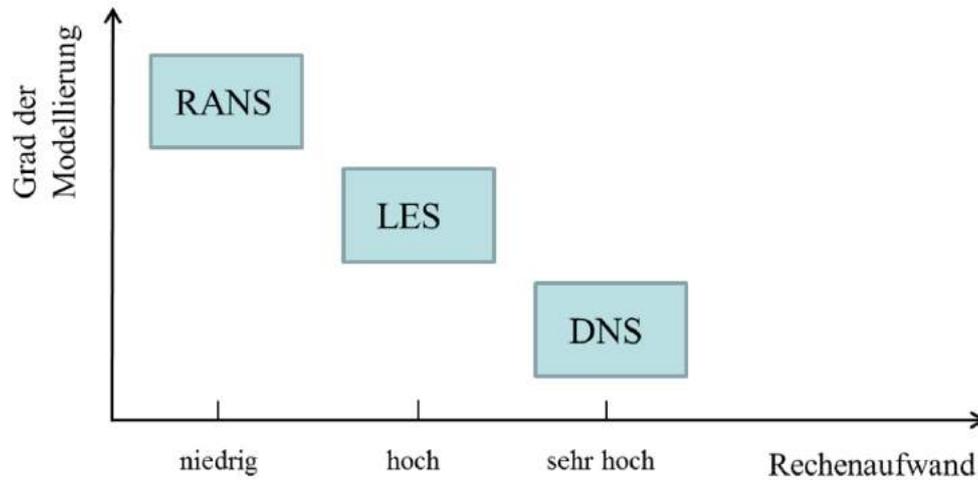


Abbildung 9.8: Numerischer Aufwand und Qualität der drei gängigen Verfahren zur Abbildung von turbulenten Strömungen. Quelle: [17]

Die Filterweite $\Delta x'$ bestimmt die Größe, ab welcher Strukturen modelliert werden sollen. Entspricht die Filterweite der Zellengröße des numerischen Gitters, so spricht man von einer impliziten Filterung [4]. D. h., durch die (zu geringe) Gitterauflösung werden kleinskalige turbulente Strukturen nicht über die Erhaltungsgleichungen abgebildet (herausgefiltert). Daher werden diese Skalen auch Sub-Gitter-Skalen

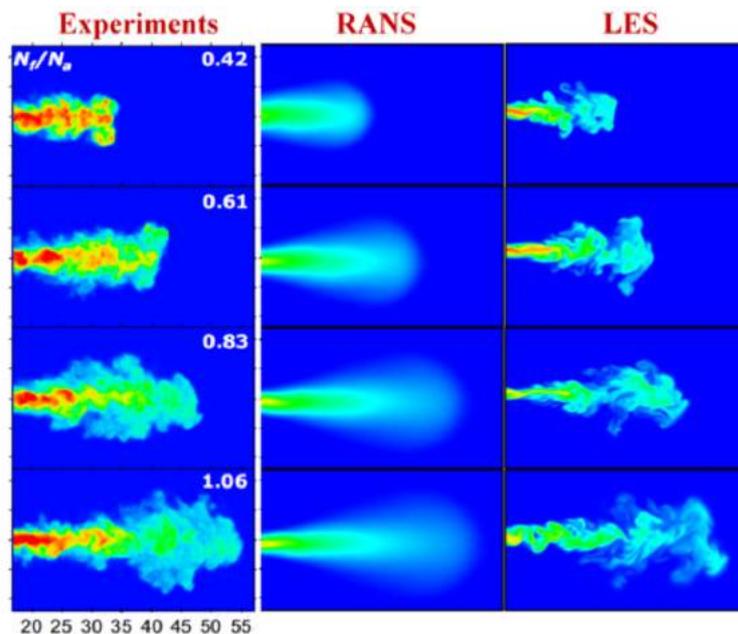


Abbildung 9.9: Gasjetsimulation: Vergleich von Experiment, RANS- und LES-Simulation. Quelle: [4]

(sub-grid-scale) genannt. Die Strukturen dieser Skalen müssen folglich modelliert werden [4], [3], [1], [17]. Ist die Filterweite $\Delta x'$ größer als die Zellengröße des numerischen Gitters, findet eine explizite Filterung statt. Die Filterung einer Strömungsgröße φ geschieht in diesem Fall durch Multiplikation mit einer

Filterfunktion $G(x')$ und anschließender räumlicher Mittelung über das Intervall der Filterweite $\Delta x'$:

$$\langle u(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta x'} \int_{-\Delta x'/2}^{\Delta x'/2} u(\vec{x} - \vec{x}', t) \cdot G(x', \sigma) dx' \quad (9.37)$$

Die Gaußfunktion dient dabei u. a. als Filterfunktion. Durch ihre Verwendung erreicht man eine nach der Gaußverteilung gewichtete räumliche Mittelung (ähnlich einer Glättung) der Strömungsgröße φ über das Intervall der Filterweite $\Delta x'$ (s. Abb. 9.10). Durch die Mittelung werden kleinskalige Schwankungen herausgefiltert [1]. Andere Filterfunktionen, wie z. B. der Boxfilter (s. [17]), werden ggf. alternativ zur

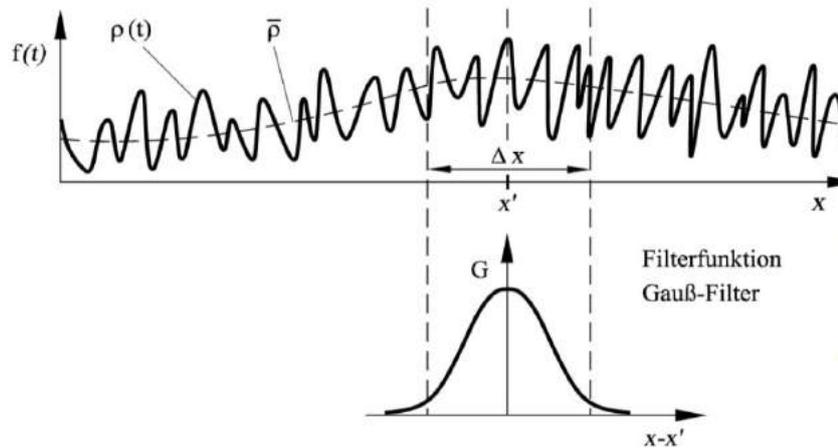


Abbildung 9.10: Filterung einer Strömungsgröße in Großstruktursimulationen durch den Gauß-Filter. Quelle: [1]

Gaußfunktion eingesetzt.

Unabhängig davon, ob die gefilterte Strömungsgröße $\langle \varphi(\vec{x}, t) \rangle$ durch eine implizite oder explizite Filterung entstanden ist, kann die ursprüngliche Strömungsgröße $\varphi(\vec{x}, t)$ in die gefilterte Größe und in einen Schwankungswert aufgeteilt werden:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \langle \varphi(\vec{x}, t) \rangle + \varphi'(\vec{x}, t) \quad (9.38)$$

In Analogie zur RANS-Formulierung werden die Strömungsgrößen in Form der Summe ihrer Anteile in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt und die bereits bekannte Filterung auf sämtliche Terme der Navier-Stokes-Gleichung angewendet.

Nach Filterung und Termumformungen ergeben sich folgende Gleichungen (Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichungen (in der Einsteinschen Summenkonvention)) [1]:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (9.39)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \rho (\langle u'_i u'_j \rangle + \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle + \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle) \right] \quad (9.40)$$

Analog zu den RANS-Gleichungen ergeben sich Terme, die den Schwankungswert u' enthalten. Diese Terme müssen modelliert werden, damit das Gleichungssystem von Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichungen lösbar bleibt. Zum einen müssen die Feinstrukturspannungen

$$\tau_{ij}^{sgs} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle \quad (9.41)$$

modelliert werden [1]. Weiterhin sind die sogenannten Cross-Terme

$$\langle u_i \langle u'_j \rangle \rangle + \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle \quad (9.42)$$

zu modellieren, falls die Filterung mit einer nichtlinearen Filterfunktion durchgeführt wurde.

Denn in diesem Fall gilt [3]:

$$\langle u_i u_j \rangle \neq \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (9.43)$$

Trotz der Nutzung eines nichtlinearen Filters werden die Cross-Terme in einigen Anwendungen vernachlässigt [1].

Zur Modellierung der Feinstrukturspannungen werden ausschließlich Wirbelviskositätsmodelle verwendet. Hierzu kann wieder die Boussinesq-Hypothese herangezogen werden [4],[1]:

$$\tau_{ij}^{sgs} = \mu_{sgs} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) = \rho \nu_{sgs} \cdot 2S_{ij} \quad (9.44)$$

Zur Berechnung der Wirbelviskosität ν_{sgs} können Wirbelviskositätsmodelle verwendet werden, die schon bei RANS-Modellierung Anwendung gefunden haben, wie z. B. das k - ϵ -Modell. Ein weiteres Wirbelviskositätsmodell ist das Smagorinsky-Lilly-Modell, das in der Regel ausschließlich für LES-Simulationen genutzt wird. Da dieses Modell in dieser Arbeit zur Durchführung von LES-Simulationen Anwendung findet, wird es im Folgenden näher erörtert.

9.5.1 Das Smagorinsky-Lilly-Modell

Nach dem Smagorinsky-Lilly-Modell kann die turbulente Viskosität μ_t unterhalb der Filterweite Δ_x mit Hilfe der Gleichung [3]

$$\mu_t = C_s^2 \Delta_x^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (9.45)$$

berechnet werden. Dabei entspricht C_s der sogenannten Smagorinsky-Konstanten. In vielen Strömungsszenarien ist der Wert $C_s = 0,2$ gut geeignet, um die turbulente Viskosität zu berechnen. In Kanalströmungen ist dies u. a. nicht der Fall. Insbesondere an den Kanalwänden ist eine drastische Reduzierung der Smagorinsky-Konstanten erforderlich. Die Reduzierung kann mit der van-Driest-Dämpfung [3]

$$C_s = C_{s0} \left(1 - e^{-y^+/A^+} \right)^2 \quad (9.46)$$

mit

$$A^+ \approx 25 \tag{9.47}$$

(y^+ s. Gl. 9.25) erfolgen. Die van-Driest-Dämpfung wurde bereits als Wandfunktion für die Wirbelviskosität in RANS-Modellen verwendet [3].

Eine weitere Alternative zum klassischen Smagorinsky-Modell ist die Nutzung des dynamischen Smagorinsky-Modells. Hier ist C_s nicht konstant, sondern hängt von den Strömungsgrößen ab.

Teil III

Einführung in OpenFOAM / Benchmark

10 OpenFOAM

10.1 Allgemeines

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln der physikalische bzw. mathematische Hintergrund von Strömungen sowie notwendige Werkzeuge zur Beschreibung dieser erörtert wurden, folgen nun Vorüberlegungen zur Anwendung der dargestellten Modelle und Werkzeuge für bestimmte Strömungsszenarien. Die in dieser Arbeit betrachteten Strömungssimulationen sind ausschließlich mit der Software OPENFOAM durchgeführt worden. Diese Software umschließt eine große Anzahl von Programmen bzw. Werkzeugen zur Vorbereitung (Pre-Processing), Durchführung (Processing) und Nachbereitung (Post-Processing) von numerischen Simulationen. Es existieren u. a. Werkzeuge zur Simulation von kompressiblen/inkompressiblen, temperaturbehafteten/isothermen, einphasigen-/mehrfasigen Strömungen beliebiger Fluide. Über die Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen hinaus stellt OPENFOAM weitere Modelle zur Verfügung. Zu diesen Modellen zählen beispielsweise die Turbulenzmodelle RANS und LES sowie u. a. Modelle zur Beschreibung von Verbrennungsprozessen und Wärmeübergängen im Zusammenhang mit Brandsimulationen. Neben Strömungsszenarien können auch andere numerische Probleme, wie z. B. Spannungs- bzw. Dehnungsberechnungen, behandelt werden.

Im Folgenden sind Werkzeuge aufgeführt, die für diese Arbeit verwendet wurden.

10.2 Relevante Werkzeuge

10.2.1 Pre-Processing

gmshToFoam

Die Netzgenerierung selbst wird von dem Programm GMSH durchgeführt, welches nicht zu den Werkzeugen von OPENFOAM zählt. OPENFOAM enthält ebenfalls Netzgenerierer. Aus Gründen der einfachen Anwendbarkeit ist jedoch die Software GMSH als Netzgenerierer ausgewählt worden. Das durch GMSH erstellte Netzgitter wird mit dem Konverter GMSHTOFOAM in eine Form umgewandelt, die mit OPENFOAM kompatibel ist.

10.2.2 Processing

icoFoam

Das Werkzeug ICOFOAM dient zur Berechnung von isothermen, inkompressiblen Strömungsproblemen. ICOFOAM wird auch als „Solver“ bezeichnet, obwohl das Werkzeug mehr umfasst als einen Löser für Gleichungssysteme oder Differentialgleichungen. Der Solver ICOFOAM ist in der Lage, für ein ihm zur

Verfügung gestelltes Netzgitter eine FVM-Diskretisierung herzustellen und ggf. entstandene Differentialgleichungen oder algebraische Gleichungssysteme zu lösen. Die Vereinfachungen bzw. Interpolationen, die bei der FVM-Diskretisierung angewendet werden sowie der Löser für das algebraische Gleichungssystem und die Differentialgleichungen können unter bestimmten Alternativen ausgewählt werden. In dieser Arbeit werden bei der FVM-Diskretisierung lineare Interpolationen benutzt. Zur Erfüllung der Impulsgleichungen unter der Nebenbedingung der Kontinuitätsgleichung wird der semi-explizite PISO-Algorithmus zur Hilfe herangezogen. Die Zeitdiskretisierung wird dabei durch das Runge-Kutta-Verfahren vorgenommen.

Die oben genannten Optionen sowie Rand- und Anfangsbedingungen, etc., werden in ASCII-Dateien festgehalten, die dann von OPENFOAM ausgelesen werden. Diese Dateien sind jeweils für jedes in dieser Arbeit betrachtete Strömungsszenario im Anhang B einsehbar.

pisoFoam

PISOFOAM ist ebenfalls ein Solver für isotherme, inkompressible Strömungen. Im Gegensatz zum Werkzeug ICOFOAM unterstützt PISOFOAM die Verwendung der Turbulenzmodelle RANS und LES. Die zu wählenden Modelle sowie die Einstellungen bzw. Parameter werden ebenfalls in ASCII-Dateien festgehalten, die im Anhang B zu sehen sind. Optionen, die die FVM-Diskretisierung sowie deren Lösung betreffen, sind mit den Optionen des ICOFOAM-Solvers identisch.

10.2.3 Post-Processing

paraFoam

Für die Visualisierung von Ergebnissen numerischer Berechnungen stellt OPENFOAM das Werkzeug PARAFoam zur Verfügung. Dies wird in dieser Arbeit insbesondere zur Visualisierung der Geschwindigkeitsprofile der Strömungen benutzt.

11 Benchmark: Die Karmannsche Wirbelstraße

Bevor man sich in neues unbekanntes Terrain begibt, ist die Funktionalität der benutzten Software, insbesondere die korrekte Eingabe der Rand- und Anfangsbedingung sowie weiterer Parameter, anhand eines „einfachen“ Szenarios zu testen.

Als Benchmark soll die laminare (zweidimensionale) Umströmung eines Kreiszyinders dienen. Die Phänomene dieser Strömung sind in der Literatur bereits mehrfach erfolgreich durch numerische Modellierungen reproduziert worden [18] - [28].

Insbesondere bei der laminaren Umströmung eines Kreiszyinders tritt das regelmäßige Ablösen von Wirbeln am Körper auf. Löst sich ein Wirbel an einer Seite des Körpers, so muss sich aus Gleichgewichtsgründen ein Gegenwirbel mit entgegengesetzter Rotationsrichtung bilden. Die entsprechend entstehende Zirkulationsströmung führt zu einer kleineren Umfangsgeschwindigkeit an einer Seite des Körpers und zu einer größeren Geschwindigkeit auf der gegenüberliegenden Seite. Laut der Bernoulli-Gleichung muss bei niedriger (höherer) Geschwindigkeit der Druck steigen (fallen), um ein bestimmtes Energiepotential zu erhalten. Folglich entstehen unterschiedliche Drücke an den gegenüberliegenden Seiten des Körpers, die eine Kraft senkrecht zur Strömung erzeugen. Nach einer Zeitspanne wiederholt sich die beschriebene Wirbelablösung an der anderen Seite des Körpers. Insbesondere bei niedrigen Reynoldszahlen lösen sich die Wirbel periodisch an gegenüberliegenden Seiten des Zylinders. Die abgelösten Wirbel bilden dann einen Strömungsnachlauf, der nach Theodore von Karmann, als Karmannsche Wirbelstraße bekannt ist [15], [30].

Die Karmannsche Wirbelstraße ist in der Natur z. B. bei Wolkenströmen zu erkennen, die auf eine Insel oder Inselgruppe treffen. Abb. 11.1 zeigt Wirbelablösungen hinter der Juan-Fernandez-Insel.

Die Wirbelablösefrequenz f_w ist dabei abhängig von der Reynoldszahl, dem Zylinderdurchmesser D und der Anströmgeschwindigkeit u_∞ . Um Experimente mit verschiedenen Durchmessern und Anströmgeschwindigkeiten in Bezug auf die Ablösefrequenz f_w dennoch vergleichen zu können, führte Vincent Strouhal eine dimensionslose Kennzahl, die Strouhalzahl

$$S = \frac{D \cdot f_w}{u_\infty} \quad (11.1)$$

ein.

Die Ablösung von Wirbeln, im Besonderen beim Kreiszyylinder, ist der Grund für Schwingungen von Körpern senkrecht zur Anströmrichtung. Dieses Phänomen ist z. B. bei hohen bzw. schlanken Schornsteinen bereits beobachtet worden und kann bemessungsrelevant sein [15]. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die Ablösefrequenz f_w zu legen. Befindet sich die Eigenfrequenz des Bauteils im Bereich der Ablösefrequenz, kann dies zu erheblichen Schwingungen führen [31]. Im ungünstigsten Fall führt die Wirbelablösung (ggf. in Kombination mit anderen Schwingungsphänomenen, wie das Flattern) zu Reso-

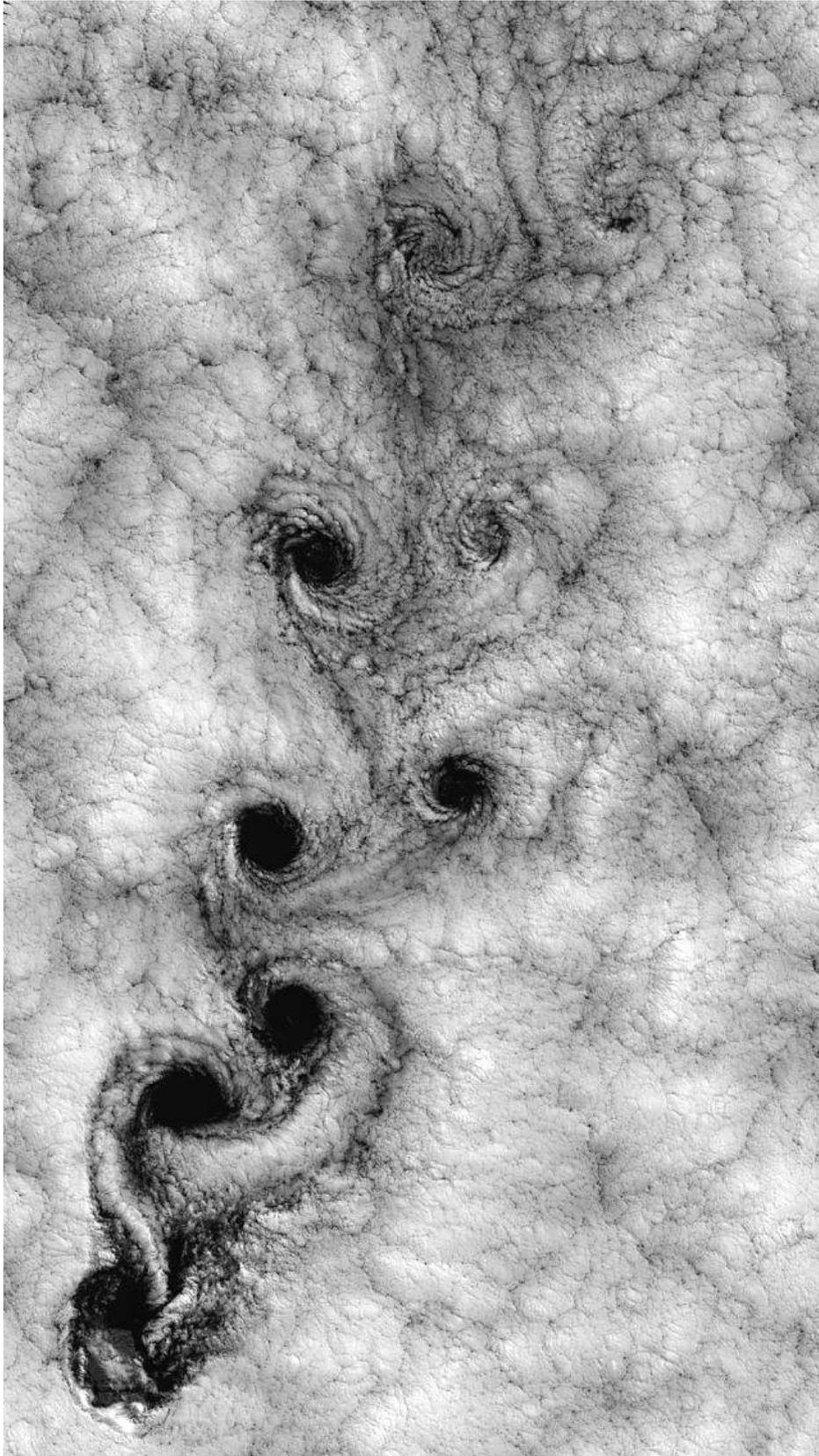


Abbildung 11.1: Karmannsche Wirbelstraße hinter der Juan-Fernandez Insel (Satellitenbild). Quelle: [4]

nanzerscheinungen, wenn die beiden Frequenzen nahezu identisch sind [31].

Diese Resonanzerscheinungen traten auch bei der Tacoma-Narrows-Bridge (1940) auf. Der Einsturz der Brücke ist jedoch hauptsächlich auf ein anderes Schwingungsphänomen, das Biegetorsionflattern, zurückzuführen [52] (siehe Abb. 11.2).



Abbildung 11.2: Einsturz der Tacoma-Narrows-Brigide im November 1940 im Bundesstaat Washington.
Quelle: [36]

11.1 Umströmung des Kreiszyinders mit *OpenFOAM* ($Re=100$)

Die (rein laminare) Kreiszyinderumströmung bei einer Reynoldszahl von 100 (unterkritischer Bereich [15]) eignet sich sehr gut als Benchmark, da dieses Szenario noch keinerlei turbulente Strukturen aufweist und weiterhin in der Literatur gut dokumentiert ist. Ziel des Benchmarks ist die Generierung eines Netzgitters, welche eine numerische Simulation der Umströmung ohne Randeinflüsse ermöglicht. Aus der Druckverteilung um den Zylinder sollen der Widerstands- und Auftriebsbeiwert berechnet werden.

Weiterhin soll die Strouhalzahl der Wirbelablösung ermittelt werden. Die Periode der Wirbelablösung stimmt mit der Periode der zeitlichen Entwicklung des Auftriebsbeiwertes überein und kann daher über eine Fourier-Transformation (FT) des zeitlichen Verlaufs des Auftriebsbeiwertes berechnet werden.

11.1.1 Geometrie des Szenarios und Netzgenerierung

Die Umströmung eines Körpers ist bei einer Reynoldszahl von 100 noch weitgehend laminar, sodass turbulente Strukturen, die in alle drei räumlichen Dimensionen bewegt werden, ausgeschlossen werden können. Dementsprechend ist eine zweidimensionale Strömungssimulation ausreichend, um sämtliche Eigenschaften der Strömung abzubilden. Geometrie und Randbedingungen des Strömungsszenarios sind in Abb. 11.3 und in den Tab. 11.1 und 11.2 dargelegt. Abb. 11.4 zeigt die Struktur des verwendeten Netz-

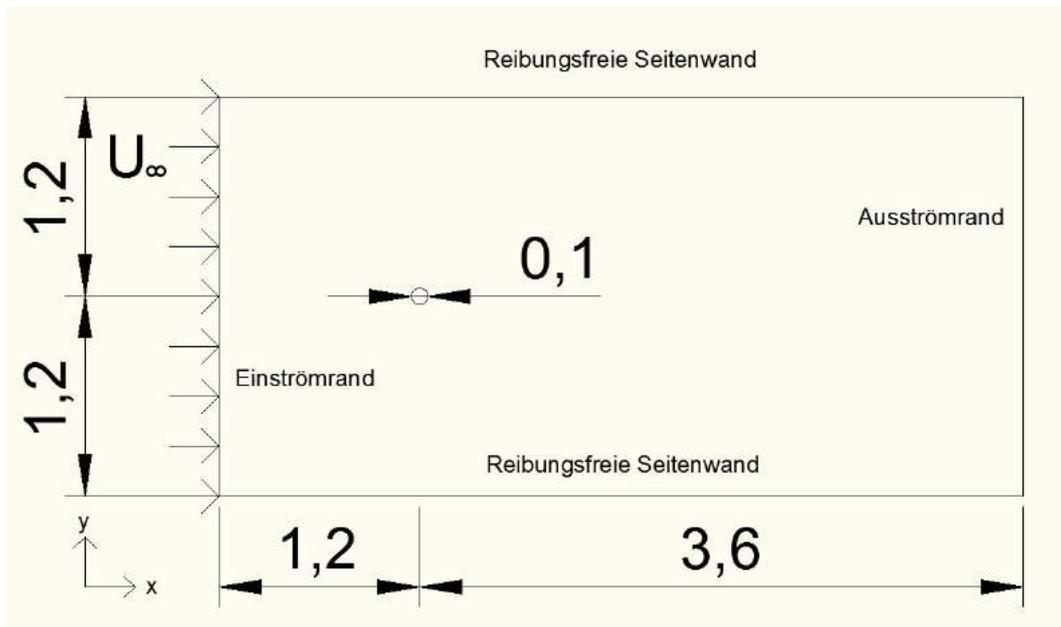


Abbildung 11.3: Geometrie der Kreiszyklindrumströmung. Angaben in [m].

Rand	Bedingung an \vec{u}	Bedingung an p
Einströmrand	$u_x = U_\infty; u_y = 0$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Ausströmrand	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$p = 0$
Rand (oben/unten)	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Rand des Kreiszylinders	$\vec{u} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$

Tabelle 11.1: Randbedingungen.

$$\boxed{u_x = U_\infty; u_y = 0 \quad p = 0}$$

Tabelle 11.2: Anfangsbedingungen des inneren Netzes.

gitters. Bei der Generierung des Netzes ist darauf geachtet worden, die Umgebung des Zylinders bzw. den

Bereich unmittelbar hinter dem Zylinder feiner zu diskretisieren als die Randbereiche. Der Umgebung des Zylinders sollte ein feineres Netz zu Grunde liegen, da hier Geschwindigkeits- und Druckveränderung (u. a. auch die Wirbelablösung) stattfinden. Das Netz ist mit Hilfe einer Grundlage von [33] mittels der Software *gmsH* entstanden. Da die Software *OpenFOAM* ausschließlich die Verwendung von dreidimensionalen Netzen zulässt, sind für die Erstellung Hexaeder mit einer Ausdehnung von 0,1 m in z-Richtung eingesetzt worden, obwohl die Durchführung einer zweidimensionalen Simulation Ziel des Benchmarks ist. Es handelt sich um Hexaeder mit viereckigen Flächen. Diese sind teilweise gekrümmt. Durch die Randbedingung *empty* der Flächen in x-y-Ebene wird der Software jedoch signalisiert, dass die Berechnung der Geschwindigkeitskomponente u_z in z-Richtung nicht gewünscht ist, folglich eine zweidimensionale Strömungssimulation ausgeführt werden soll.

Um den Einfluss des Diskretisierungsgrades zu untersuchen, sind drei verschiedene Diskretisierungen für die Simulation verwendet worden. Die Anzahl der genutzten Hexaeder sind in Tab. 11.3 dargestellt. Bei Untersuchung einer laminaren Strömung kann davon ausgegangen werden, dass die numerisch bestimmten Strömungsgrößen bei kontinuierlicher Erhöhung des Diskretisierungsgrades konvergieren. D. h., die ausreichende Netzdichte ist dann gefunden, wenn sich eine betrachtete Größe der Strömung bei Erhöhung der Netzdichte nicht mehr verändert [3].

Simulation (lfd. Nr.)	Anzahl der Zellen (Hexaeder)
Z 1.1	14520
Z 1.2	28980
Z 1.3	36980

Tabelle 11.3: Anzahl der genutzten Zellen für die Umströmung des Kreiszyinders.

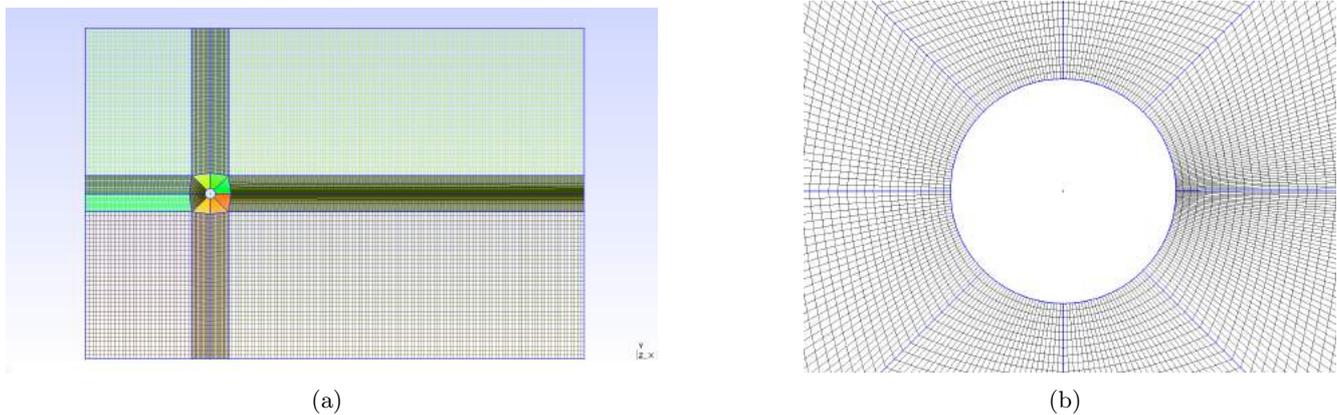


Abbildung 11.4: Darstellung der Diskretisierung des Strömungskanals. a) Übersicht
b) Detailsansicht im Bereich des Zylinders.

11.1.2 Simulationsergebnisse

Die numerische Simulation der Strömung um den Kreiszyylinder wurde mittels der Software *OpenFOAM* ausgeführt. Für die Simulationsläufe wurde jeweils ein Zylinderdurchmesser von 0,1 m gewählt. Die Anströmgeschwindigkeit u_∞ betrug jeweils 0,1 m/s. Um eine Reynoldszahl von 100 zu erreichen, wurde die kinematische Viskosität des strömenden Fluids auf $1 \cdot 10^{-4}$ festgelegt. Das Werkzeug *icoFoam* berechnet die Lösung des äquivalenten Modells einer inkompressiblen, isothermen, laminaren Strömung eines newtonschen Fluids. Dementsprechend wurde dieses Werkzeug hier genutzt. Sämtliche Textdateien, welche die nötigen weiteren Eigenschaften der Strömungssimulation (Anfangs- und Randbedingungen, Transporteigenschaften, Löser für lineare Gleichungssysteme bzw. Differentialgleichungen, etc.) für die Software deklarieren, sind im Anhang B.1 angegeben.

Abb. 11.5 zeigt das Geschwindigkeitsprofil der ausgeprägten Strömung. Die Wirbelablösungen und die erwartete Karmansche Wirbelstraße (Strömungsnachlauf) sind sehr gut zu erkennen. Dabei löst sich jeweils auf jeder Seite ein Wirbel und ein Gegenwirbel. Das Fluid muss dem Zylinder im Vorfeld ausweichen und die Teilströme treffen erst nach dem Zylinder wieder aufeinander. Dementsprechend ist die Geschwindigkeit im vorderen und hinteren zylindernahen Bereich approximativ Null. An Ober- und Unterseite des Zylinders ist die Geschwindigkeit erwartungsgemäß größer als die Anströmgeschwindigkeit, denn hier wird der Strömungskanal durch den Kreiszyylinder eingeengt bzw. die Stromlinien rücken lokal näher zusammen (siehe Abb. 11.5).

Festzustellen ist, dass dieser Benchmark die erwarteten Phänomene der Strömung reproduziert und ein plausibles Geschwindigkeitsprofil erzeugt.

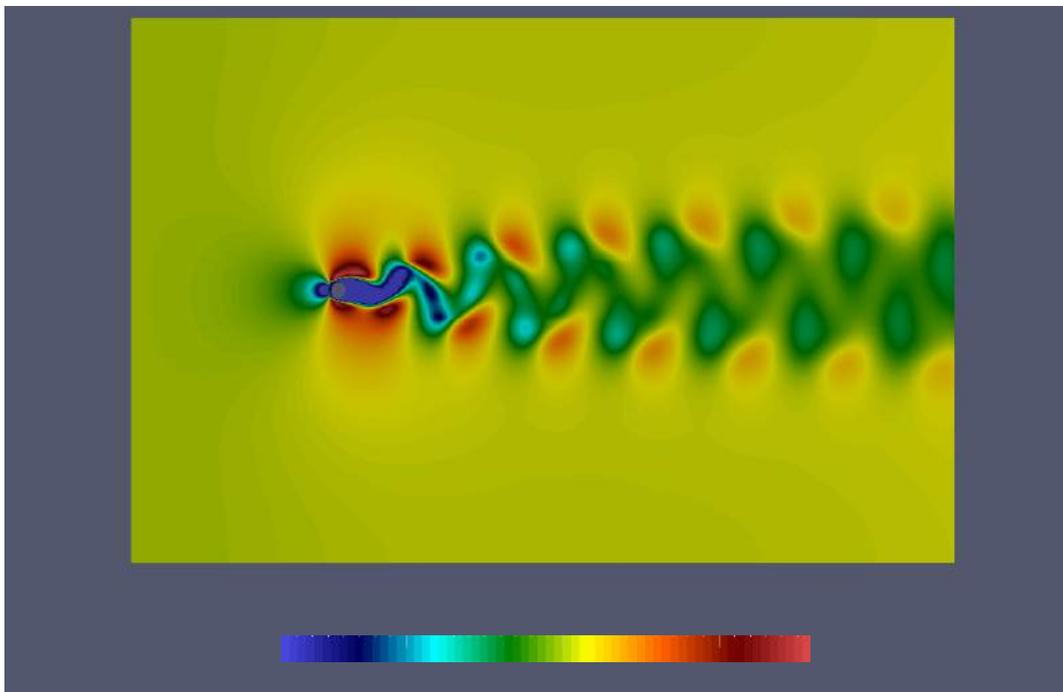


Abbildung 11.5: Geschwindigkeitsprofil der Kreiszyklinderumströmung bei einer Reynoldszahl von 100.

11.1.3 Kraftkoeffizienten

Die zeitlichen Verläufe des Widerstands- und des Auftriebsbeiwertes (c_d , c_l) des Kreiszyllinders, ermittelt durch den dritten Simulationslauf Z 1.3 (s. Tab. 11.3), sind in Abb. 11.6 dargestellt. Als Referenzfläche A_{ref} ist die Projektion des Zylinders in Strömungsrichtung gewählt worden und beträgt hier somit $D^2 = 0,01$. Nach etwa 80-90 Simulationssekunden ist die Wirbelablösung (Karmansche Wirbelstraße) vollständig ausgeprägt.

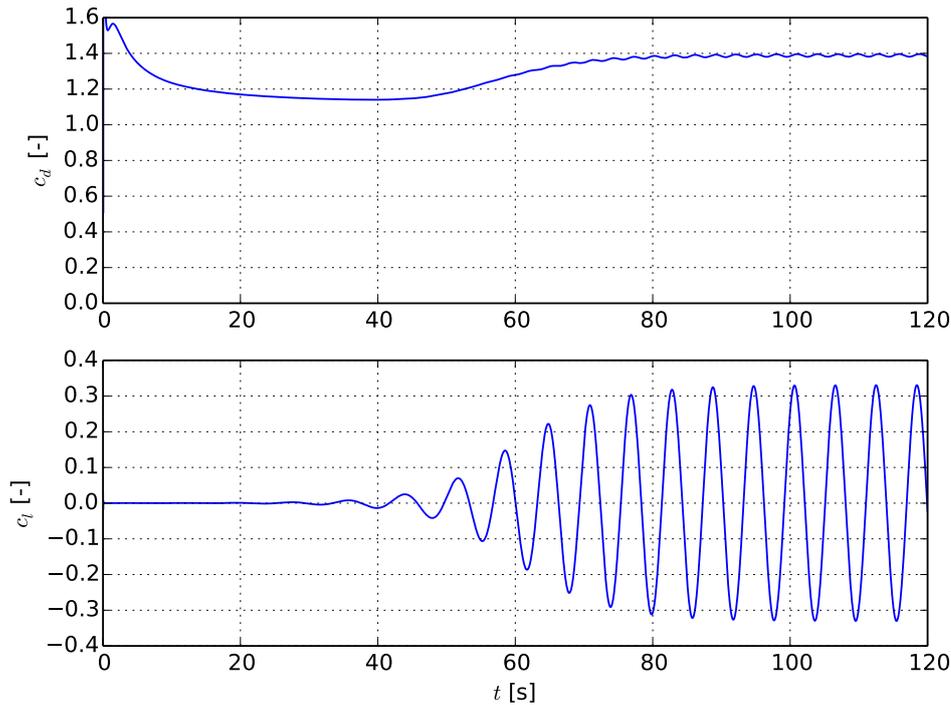


Abbildung 11.6: Widerstands- und Auftriebskoeffizient des Kreiszyllinders ($Re\ 100$) (36980 Gitterzellen).

vollständig ausgeprägt. Die Strömung verläuft ab diesem Zeitpunkt periodisch. Bevor die Wirbelablösung einsetzt (etwa von Sekunde 20 bis Sekunde 40), ist der Widerstandskoeffizient betragsmäßig kleiner und zeigt keinerlei Schwingungen. Der Auftriebsbeiwert ist in diesem Bereich approximativ Null. Die Wirbelablösungen führen zu periodischen Schwingungen der Widerstands- und Auftriebskraft. Die Koeffizienten sind proportional zu den Kräften. Folglich schwingen auch die Beiwerte. Weiterhin bedeutet dies, dass der Mittelwert und die Amplitude der Koeffizienten in diesem Zeitbereich konstant sind. Der Mittelwert des Widerstandskoeffizienten $c_{w,avg}$ beträgt 1,39 gemittelt über den Zeitbereich von 100 bis 120. Der maximale Wert des Auftriebsbeiwertes $c_{l,max}$ ist 0,33. Die Frequenz des Widerstandskoeffizienten ist doppelt so hoch wie die Frequenz des Auftriebskoeffizienten.

Die Periode $T_w = \frac{1}{f_w}$ einer Schwingung kann direkt in der Abb. 11.6 abgelesen werden. Alternativ bietet sich die Ausführung einer FT an. Die Frequenz 0,169 Hz dominiert die Schwingung.

Bei einer Anströmgeschwindigkeit u_∞ von 0,1 m/s und einem Zylinderdurchmesser D von 0,1 m beträgt die Strouhalzahl S nach Gl. 11.1 0,169.

Tabelle 11.4 zeigt sämtliche Ergebnisse dieses Benchmarks, gegenübergestellt zu Ergebnissen von Ex-

perimenten und Simulationen aus der Literatur. Es ist festzustellen, dass der Simulationslauf Z 1.3 die Ergebnisse der Literatur sehr gut reproduziert. Daher ist davon auszugehen, dass die Eigenschaften der Strömung in diesem Benchmark (Rand- und Anfangsbedingungen, Transporteigenschaften, Netz bzw. Geometrie, etc.) richtig gewählt sind.

Vorliegende Arbeit		Re	$c_{d,avg}$	$c_{l,max}$	S
Z 1.1	Simulation	100	1,44	0,38	0,167
Z 1.2	Simulation	100	1,40	0,334	0,169
Z 1.3	Simulation	100	1,39	0,33	0,169
Literatur		Re	$c_{w,avg}$	$c_{l,max}$	S
Henderson 1995 [18]	Simulation	100	1,38	-	-
Cao/Wan 2010 [21]	Simulation (3D)	100	1,39	0,335	0,168
Sheard et al. 2005 [25]	Simulation	100	1,38	-	-
Williamson 1989 [28]	Experiment	100	1,33	0,35	0,16-0,164
Wieselsberger 1921 [15]	Experiment	100	1,43	-	-
Engelbreth 2011 [26]	Simulation (2D und 3D)	100	1,385	0,34	0,171

Tabelle 11.4: Kraftbeiwerte und Strouhalzahlen. Vergleich mit Ergebnissen der Literatur.

Teil IV

Turbulente Umströmung von Körpern mit Hilfe von OpenFOAM

12 Umströmung von Rechteckquerschnitten bei hohen Reynoldszahlen

Nachdem der im vorangegangenen Kapitel beschriebene Benchmark für laminare Strömungen erfolgreich ausgeführt werden konnte, sollen nun Strömungen bei höheren Reynoldszahlen, d. h. Strömungen, die turbulente Strukturen aufweisen, mit Hilfe von OPENFOAM numerisch simuliert werden. Bevor ein Brückenquerschnitt untersucht wird, werden in diesem Kapitel zunächst die Möglichkeiten diskutiert, turbulente Strömungen um einen „einfacheren“ brückenähnlichen Querschnitt numerisch zu berechnen. Als umströmter Querschnitt dient ein Rechteckquerschnitt mit dem Verhältnis von Breite zu Höhe von 8:1.

Für Informationen über die Umströmung eines Kreiszyinders bei hohen Reynoldszahlen siehe [38] - [45].

12.1 Vorüberlegung

In Strömungssimulationen ist es im Allgemeinen unbedingt notwendig turbulente Strukturen, falls sie existieren, abzubilden, selbst um approximativ die Eigenschaften der Strömung (z. B. die Kraftbeiwerte) zu reproduzieren. Bei Kreiszyylinderumströmungen zeigen sich dreidimensionale turbulente Strukturen ab einer Reynoldszahl von ca. 200 [16], [30]. Strömungen anderer Geometrien und Eigenschaften zeigen ggf. erst später oder schon früher turbulentes Verhalten. Bei Rohrströmungen beispielsweise schlägt die Strömung etwa bei einer Reynoldszahl von 1000-2300 von laminar in turbulent um [16].

Die im Folgenden betrachteten Strömungen werden bei einer Reynoldszahl von 10^5 durchgeführt.

Strömungen, die scharfkantige Objekte, wie der hier vorliegende Rechteckquerschnitt, umströmen, zeigen in diesem Bereich wie die meisten anderen Strömungen in jedem Fall ausgeprägte turbulente Strukturen. Zur Berechnung der Reynoldszahl wurde die Breite b des Rechtecks als charakteristische Länge l_{ref} herangezogen. Folgende Möglichkeiten bestehen zur Simulation von turbulenten Strömungen:

1. Es ist möglich, die Strömung ohne Einsatz eines Turbulenzmodells mit angemessener Genauigkeit zu simulieren. Dafür würde allerdings die in Kapitel 11 gewählte Diskretisierung bei weitem nicht ausreichen. Turbulenz ist immer dreidimensional. Soll diese also ohne Turbulenzmodell direkt über die Navier-Stokes-Gleichungen abgebildet werden, muss das Netzgitter ebenfalls dreidimensional sein, selbst wenn sich Attribute wie Geometrie des umströmten Körpers, Randbedingungen, etc. in einer Koordinatenrichtung nicht verändern. Weiterhin zerfallen turbulente Strukturen (Wirbel) zunächst in sehr kleine Wirbel und dissipieren erst dann (vgl. Kapitel 9.2). Um dieses Phänomen abzubilden, darf die Gitterzellgröße nicht größer als die Kolmogorov-Länge sein. Ein entsprechender Diskretisierungsgrad wäre extrem hoch und würde zu hohen Rechenzeiten führen, falls das Rechensystem überhaupt über genug Arbeitsspeicher verfügt, um das entsprechend große Gleichungssystem zu

lösen. Die Simulation von Strömungen ohne Turbulenzmodell mit ausreichendem Diskretisierungsgrad nennt man DNS (Direct-Numerical-Solution) (vgl. Kapitel 9.2). Aus genannten Gründen des Rechen- und Speicheraufwands wird hier von einer direkten Simulation (DNS) abgesehen.

2. Die zweite Möglichkeit bzw. die erste hier eingesetzte Methode beinhaltet die Verwendung eines RANS-Modells (s. Kap. 9.2). Innerhalb der RANS-Modelle ist zwischen Wirbelviskositätsmodellen, z. B. dem *Standard-k-ε*-Modell (vgl. Kapitel 9.4.2), und Reynoldsspannungsmodellen, z. B. dem Modell nach *Launier, Reece* und *Rodi* (LRR) (vgl. Kapitel 9.4.5) zu unterscheiden. Da Wirbelviskositätsmodelle ohnehin nur homogene, isotrope turbulente Strukturen abbilden können (vgl. Kapitel 9.4.2), wird bei der Verwendung dieser Modellklasse von einer dreidimensionalen Simulation abgesehen, um den Rechen- und Speicheraufwand zu minimieren. Reynoldsspannungsmodelle können zwar anisotrope turbulente Strukturen modellieren, dennoch wird auch hier von einer dreidimensionalen Simulation aus bereits genannten Gründen abgesehen. Man muss sich folglich darüber im Klaren sein, dass tatsächlich existierende anisotrope Strukturen in einer zweidimensionalen Modellierung vernachlässigt werden. Dennoch können 2D-RANS-Simulationen in vielen Fällen bestimmte Eigenschaften der Strömung sehr gut approximieren. Die Qualität einer 2D-RANS-Simulation ist folglich im Einzelfall zu prüfen.
3. Eine dritte Möglichkeit besteht in der Ausführung einer Grobstruktursimulation (*Large – Eddy – Simulation* (LES)) (vgl. Kapitel 9.5). Diese muss immer im dreidimensionalen Raum durchgeführt werden, da u. a. Konvektion und Zerfall großer turbulenter Strukturen hier direkt über die Navier-Stokes-Gleichungen erfolgen soll [3], [1], [38]. Grobstruktursimulationen sind daher a priori rechenzeitintensiver als 2D-RANS-Simulationen, können die Strömungsattribute aber im Allgemeinen genauer reproduzieren.

12.2 Geometrie des Szenarios und Netzgenerierung

Im folgenden Szenario wird im Wesentlichen gegenüber der Zylinderumströmung lediglich der umströmte Querschnitt ausgetauscht. Anfangs- und Randbedingungen haben sich im Benchmark (s. Tab. ??) als korrekt erwiesen und werden hier somit wieder verwendet (s. Tabn. 12.1, 12.2). Eine Ausnahme bildet die Randbedingung des Einlasses.

Rand	Bedingung an \vec{u}	Bedingung an p
Einströmrand (turbulent)	$\bar{u}_x = U_\infty; \bar{u}_y = 0; (u_z = 0)$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Ausströmrand	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$p = 0$
Rand (oben/unten)	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Rand (Front-/Rückseite) (nur LES-3D)	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Rechteck	$\vec{u} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$

Tabelle 12.1: Randbedingungen.

$$\boxed{u_x = U_\infty; u_y = 0; (u_z = 0) \quad | \quad p = 0}$$

Tabelle 12.2: Anfangsbedingungen des inneren Netzes.

Im folgenden Szenario wird ein turbulenter Einlass eingesetzt. Dieser ermöglicht die (geringfügige) Variation der Einlassgeschwindigkeit über die y-Koordinate und erzeugt so bereits kurz hinter dem Einlass Turbulenz. Die mittlere Einlassgeschwindigkeit beträgt 0,125 m/s.

Gegenüber der Zylinderumströmung ist der Strömungskanal im Verhältnis zum umströmten Querschnitt vergrößert, um Randeinflüsse auszuschließen (s. Abb. 12.1 a)/b)). Dieser wird jeweils für die RANS- bzw. LES-Simulation solange vergrößert, bis eine weitere Vergrößerung keinen Einfluss mehr auf die aus der Simulation resultierenden Kraftgrößenbeiwerte hat.

Das Netzgitter der LES-Simulation ist ein dreidimensionales Gitter. Die Ausdehnung des Netzes senkrecht zur Zeichenebene (der Abb. 12.1 b)) beträgt 0,5 Meter. Der Bereich um das Rechteck ist weitaus feiner diskretisiert als die umliegenden Bereiche (s. Abb. 12.1). Es wird ein strukturiertes Netz benutzt. Die Wahl des Diskretisierungsgrads ist nicht trivial und bedarf folgender Vorüberlegungen:

- Es ist aus bereits genannten Gründen des Rechenaufwands nicht möglich, das Strömungsfeld beliebig fein zu diskretisieren.
- Es lässt sich bei turbulenten Strömungen, die durch RANS- oder LES-Modelle simuliert werden, nicht mehr pauschal sagen, dass die Ergebnisse kontinuierlich besser werden, je feiner das Netz gestaltet ist [38], [4]. D. h. eine betrachtete Größe, wie z. B. der Mittelwert des Widerstandskoeffizienten steigt oder fällt nicht unbedingt monoton bei kontinuierlicher Erhöhung des Diskretisierungsgrads. Dies kann dazu führen, dass eine experimentell bestimmte Größe „zufällig“ durch eine entsprechende numerische Modellierung bei einem bestimmten Diskretisierungsgrad reproduziert wird. Wird die Netzdichte erhöht, entfernen sich Experiment und Modellierung aber wieder. Erst bei ausreichend kleinem (aber nicht realisierbarem) Diskretisierungsgrad (\approx Kolmogorov-Länge) konvergiert die numerische Lösung garantiert.

Eine Möglichkeit mit diesen Problemen umzugehen ist die Ausführung einer Gitterstudie. Eine Gitterstudie umfasst die Umsetzung mehrerer Simulationsläufe (hier 4-5) des gleichen Strömungsszenarios, jedoch mit unterschiedlichem Diskretisierungsgrad. Im besten Fall bleibt die zu untersuchende Größe der Strömung (in dieser Arbeit sind das hauptsächlich die Kraftbeiwerte) bei Variation der Netzdichte in einem bestimmten Bereich stabil oder konvergiert gegen einen Wert. Damit ist zwar nicht garantiert, dass sich die Größe bei weiterer Verfeinerung des Netzes nicht doch ändert, das Risiko ist jedoch minimiert bzw. das Ergebnis der Simulation ist belastbarer geworden. Im schlechtesten Fall steigt und fällt die Größe der Strömung ohne sich dabei auf einen Wert zuzubewegen. Dann ist das Modell im Bereich der gewählten Diskretisierungsgrade unbrauchbar, da es kein zuverlässiges Ergebnis erzeugt. Ist eine weitere Verfeinerung des Netzes aufgrund des Rechen- oder Speicheraufwands nicht möglich, muss eine Alternative zu diesem Modell gefunden werden.

Es hat sich herausgestellt, dass Reynoldsspannungsmodelle gegenüber Wirbelviskositätsmodellen (RANS) Phänomene von Umströmungen scharfkantiger Körper besser reproduzieren können [39]. Aus diesem

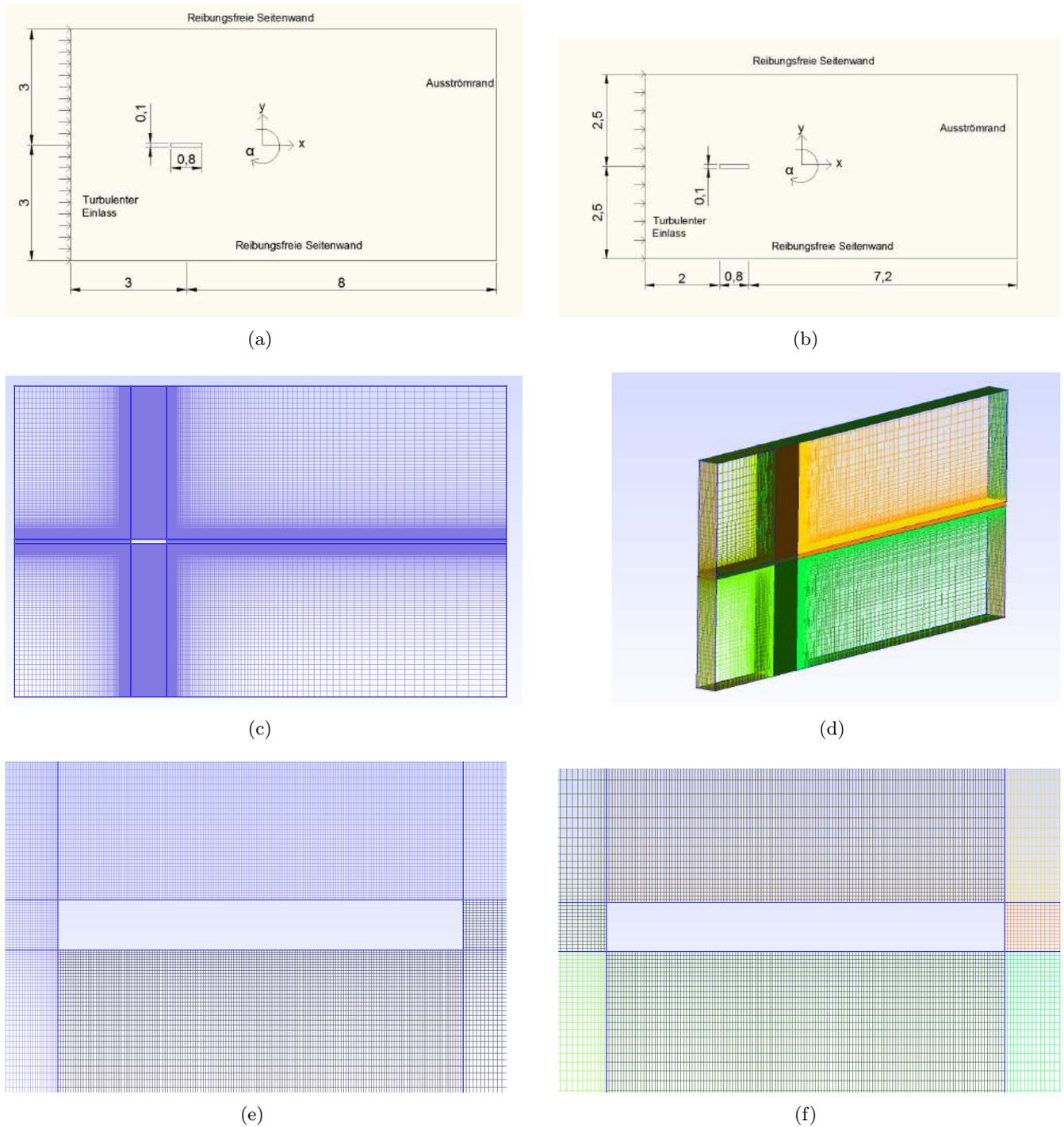


Abbildung 12.1: Geometrie und Netz der Rechteckumströmung a) Geometrie (RANS), Angaben in [m] b) Geometrie (LES), Angaben in [m] c) Übersicht (RANS-2D) d) Übersicht (LES-3D) e) Detailsansicht um das Rechteck (RANS-2D) f) Detailsansicht um das Rechteck (LES-3D).

Grund ist es empfehlenswert, die RANS-Simulationen mittels eines Reynoldsspannungsmodells zu erstellen. Es sind jeweils fünf RANS-Simulationen mit verschiedenen Gitterauflösungen unter Verwendung des LRR-Modells und fünf LES-Simulationen unter Benutzung des Smagorinsky-Lilly-Modells durchgeführt worden. Die Gitterauflösungen der RANS-Simulationen sind so gewählt, dass auch die höchste Auflösung (hier 118794 Hexaeder) mit Hilfe einer Workstation (ca. 16 Prozessoren) innerhalb von 24 Stunden berechnet werden kann. Die LES-Simulationen können mit Hilfe von 96 Prozessoren des Hochleistungsrechners JUROPA¹ jeweils innerhalb von bis zu 50 Stunden berechnet werden.

Im Anhang B.2 sind die für diese Simulationsreihe relevanten Inputdateien, die Rand- und Anfangsbedingungen, Turbulenzmodelle und weitere Parameter definieren, abgedruckt.

Tab. 12.3 zeigt die Bezeichnung der Simulationsläufe, das dabei verwendete Turbulenzmodell und den dabei verwendeten Diskretisierungsgrad.

Simulation (lfd. Nr.)	Turbulenzmodell	Anzahl der Zellen (Hexaeder)
R 1.1	(U)RANS-2D (LRR)	33250
R 1.2	(U)RANS-2D (LRR)	46602
R 1.3	(U)RANS-2D (LRR)	65338
R 1.4	(U)RANS-2D (LRR)	80202
R 1.5	(U)RANS-2D (LRR)	118794
R 2.1	LES-3D (Smagorinsky)	359856
R 2.2	LES-3D (Smagorinsky)	697872
R 2.3	LES-3D (Smagorinsky)	969792
R 2.4	LES-3D (Smagorinsky)	1207032
R 2.5	LES-3D (Smagorinsky)	1411020

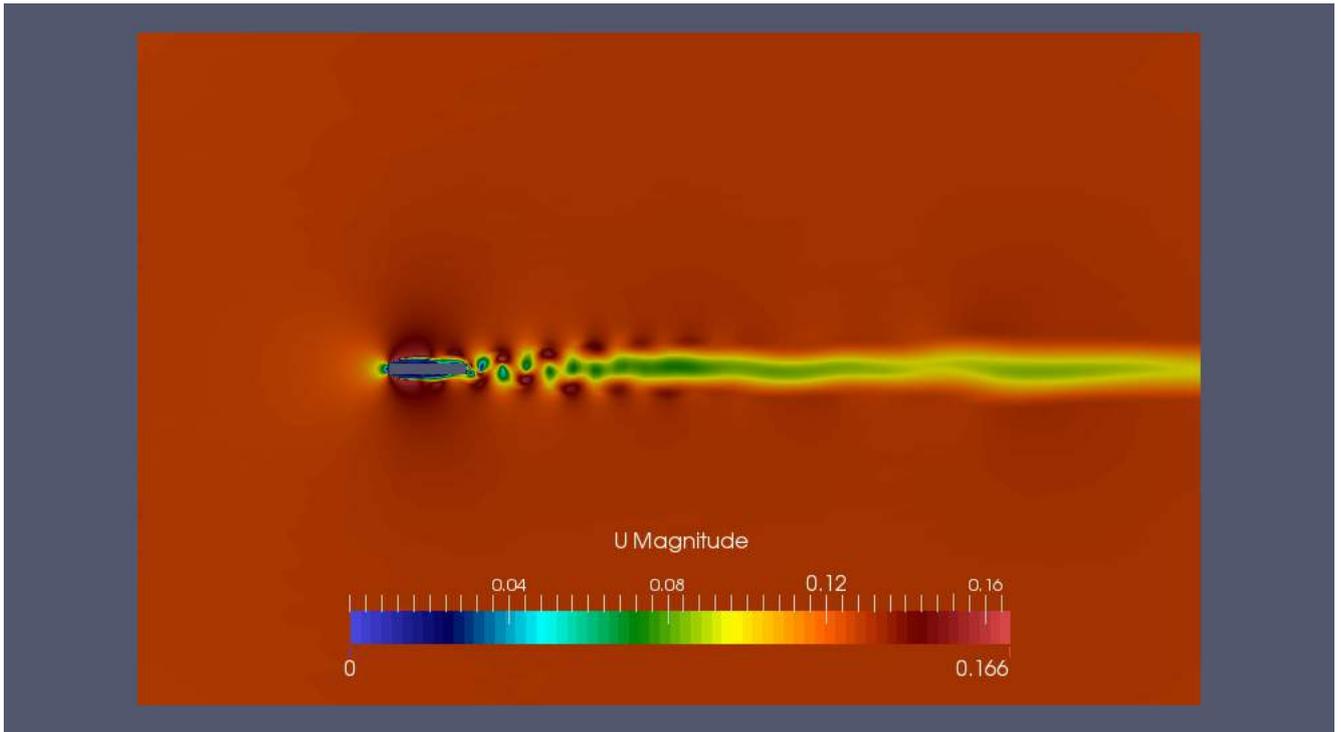
Tabelle 12.3: Anzahl der genutzten Zellen und verwendete Turbulenzmodelle für die Umströmung des Rechteckquerschnitts ($Re=10^5$).

12.3 Simulationsergebnisse der RANS-Simulationen

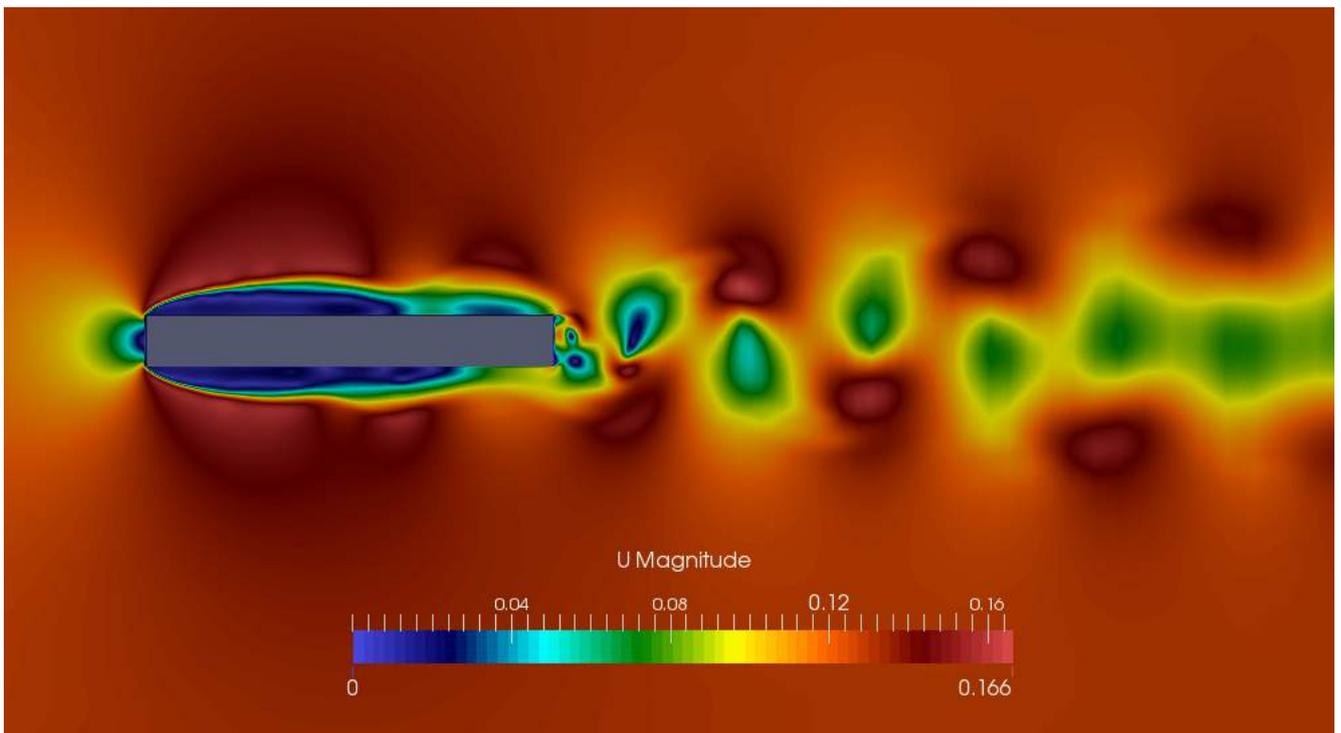
Abb. 12.2 a) zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der ausgeprägten turbulenten Rechteckumströmung. Die hier zu erkennenden Strömungsphänomene sind denen der laminaren Kreiszyylinderumströmung in vielerlei Hinsicht ähnlich. Die Stromlinien weichen dem Querschnitt nach oben und unten aus. Dementsprechend fällt die Geschwindigkeit unmittelbar an der Stirnfläche auf Null herab. An den Seiten des Querschnitts ist gegenüber allen anderen Bereichen der Strömung eine höhere Geschwindigkeit festzustellen. Im Heckbereich des Rechtecks lösen sich regelmäßig oben und unten Wirbel ab und bilden damit die im Kapitel 11 bereits beschriebene Karmannsche Wirbelstraße.

Im Gegensatz zu Strömungen um einen abgerundeten Körper sind bei scharfkantigen Körpern die Ablösestellen der Wirbel durch die Kanten am Heck vorgegeben. Das ist auch der Grund, weshalb sich Strömungen um scharfkantige Körper unterschiedlicher Reynoldszahlen nicht wesentlich unterscheiden, wenn die Reynoldszahlen oberhalb eines Grenzwerts liegen (etwa $Re=7000-10000$ [16], [31]). Bei abgerundeten Körpern dagegen verschiebt sich bei höherer bzw. niedriger Viskosität der Ablösepunkt der Wirbel. Dies

¹Standort: Forschungszentrum Jülich



(a)



(b)

Abbildung 12.2: Geschwindigkeitsverteilung der Strömung $R = 1.4$ um ein Rechteck (8:1) (RANS) ($t=150$ Sek.) a) Übersicht über Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper

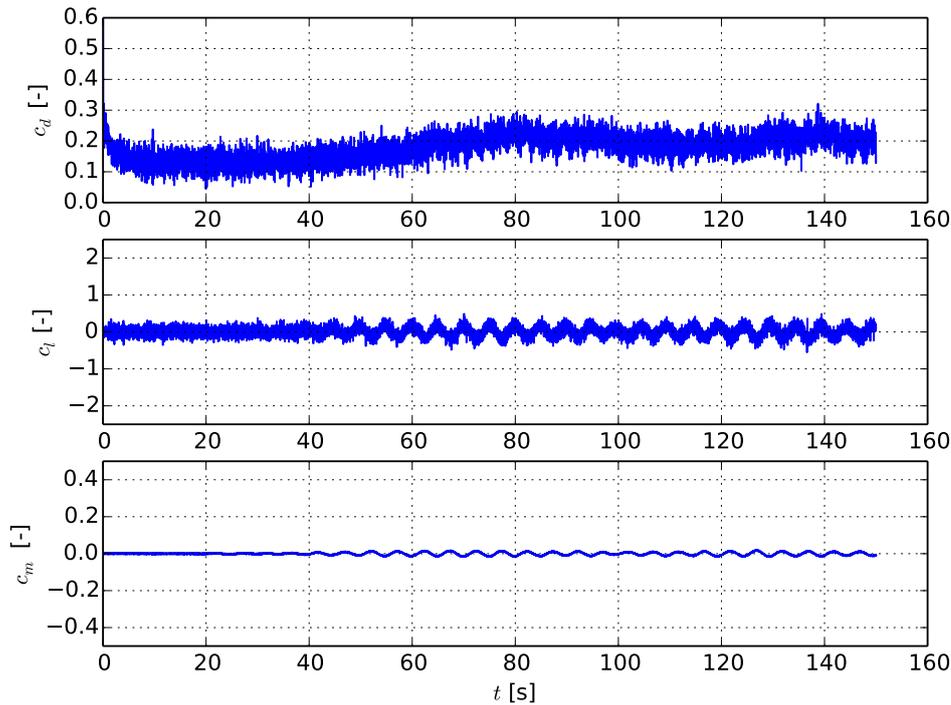


Abbildung 12.3: Kraftgrößenkoeffizienten der Rechteckumströmung R 1.4 (RANS).

hat einen unmittelbaren Einfluss auf die Gestalt der sich im Heckbereich bildenden Karmannschen Wirbelstraße. Dessen Gestalt wiederum hat u. a. entscheidenden Einfluss auf den Widerstandskoeffizienten des Körpers [15].

Die Ausbildung der Karmannschen Wirbelstraße ist zwar bei Rechteckquerschnitten im Verhältnis 8:1 zu erwarten [46], die Ablösung der Wirbel geschieht jedoch im Vergleich mit der Realität [15] zu regelmäßig und die Art und Größe der Wirbel unterscheiden sich untereinander kaum. Bei der gegebenen Reynoldszahl von 10^5 zeigen sich in der Realität unregelmäßigere, chaotischere Verteilungen der Strukturen. Diese werden durch das RANS-Modell nur ansatzweise reproduziert.

Abb. 12.2 b) zeigt die zeitlichen Verläufe der Kraftgrößenkoeffizienten. Zur Berechnung dieser dient die Breite b des Rechtecks als charakteristische Länge l_{ref} . Wird der Auftriebskoeffizient betrachtet, sind regelmäßige Schwingungen im späteren Verlauf der Strömung erkennbar. Diese Schwingungen sind auf die Ablösung der Wirbel, die Druckunterschiede an Ober- und Unterseite des Querschnitts hervorruft, zurückzuführen. Etwa ab Sekunde 80 ist die Ablösung der Wirbel vollständig ausgeprägt. Der Zeitpunkt der vollständigen Ausprägung der Wirbelstraße wird als Startpunkt für die Aufzeichnung der Koeffizienten genutzt. Aus den Werten dieser Aufzeichnungen wird dann jeweils ein Mittelwert berechnet, der mit anderen Simulationen oder experimentellen Daten verglichen wird (s. Tab. 12.4).

12.4 Ergebnisse der LES-Simulationen

Das Geschwindigkeitsprofil der Strömung (s. Abb. 12.4 a)), welches mit Hilfe des LES-Modells erzeugt wird, zeigt Ablösung von turbulenten Strukturen. Im Gegensatz zu den RANS-Simulationen ist die Ablösung hier wesentlich unregelmäßiger. Die Strukturen unterscheiden sich in Art und Größe und sind in der Regel nicht als „kreisförmige“ Wirbel zu erkennen. Folglich lässt sich sagen, dass das LES-Modell die Ablösung und Konvektion turbulenter Strukturen detaillierter abbilden kann und daher Turbulenz realer Strömungen besser reproduziert. Der Verlauf des Auftriebskoeffizienten (s. Abb. 12.4 b)) zeigt unregelmäßige Schwingungen im fortgeschrittenen Verlauf der Strömung. Diese sind auf die weitaus weniger regelmäßigeren Ablösungen von Wirbelstrukturen unterschiedlicher Größe zurückzuführen. Die Qualität der LES-Simulation in Hinsicht auf den mittleren Widerstandskoeffizienten wird in Tab. 12.4 diskutiert. Die für die Berechnung des Mittelwertes relevanten Werte wurden für die LES-Simulationen ab Sekunde 100 aufgezeichnet.

12.5 Vergleich der Resultate

Ein notwendiges Kriterium für die Qualität einer Strömung ist die Übereinstimmung des mittleren Widerstandskoeffizienten mit anderen Simulationen oder Experimenten. Tab. 12.4 ² ³ zeigt den mittleren Widerstandskoeffizienten des jeweiligen Strömungsszenarios und vergleicht diesen mit äquivalenten Ergebnissen der Literatur.

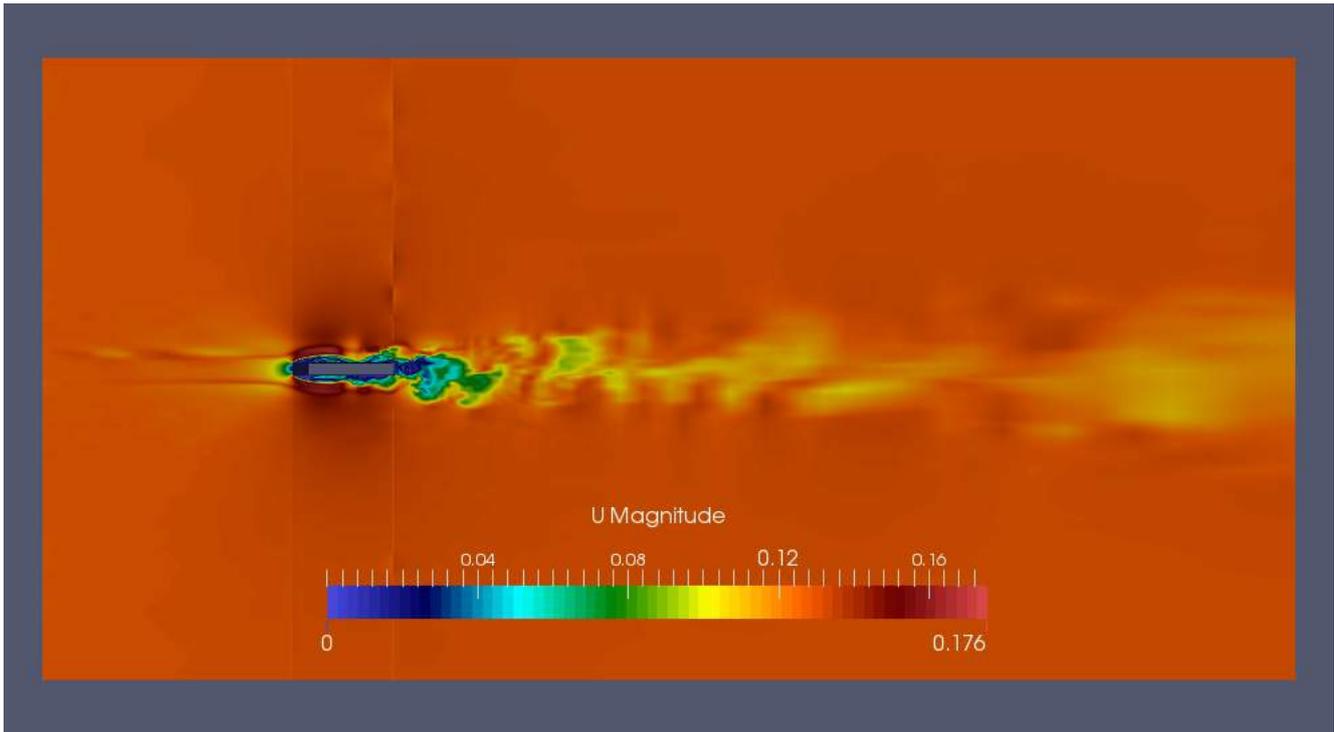
Die Ergebnisse der RANS-Simulationen lassen darauf schließen, dass der Mittelwert des Widerstandsbeiwertes auf einen Wert zwischen 0,19 und 0,2 konvergiert. Unabhängig von der Richtigkeit dieser Annahme unterscheidet sich selbst das Resultat der „besten“ RANS-Simulation um ca. 50 % gegenüber den Angaben der Literatur. Die Ergebnisse der LES-Simulationen stimmen dagegen sehr gut mit den Angaben der Literatur überein. Abgesehen vom Simulationslauf R 2.1, dessen Diskretisierungsgrad unzureichend ist, liegen alle Ergebnisse der LES-Simulationen zwischen 0,12 und 0,135. Dies lässt folgern, dass das LES-Modell die Umströmung des Rechtecks generell, insbesondere die Ablösung von turbulenten Strukturen am Rechteck, im Gegensatz zu RANS-(LRR)-Simulationen gut abbilden kann.

12.6 Umströmung eines geneigten Rechtecks

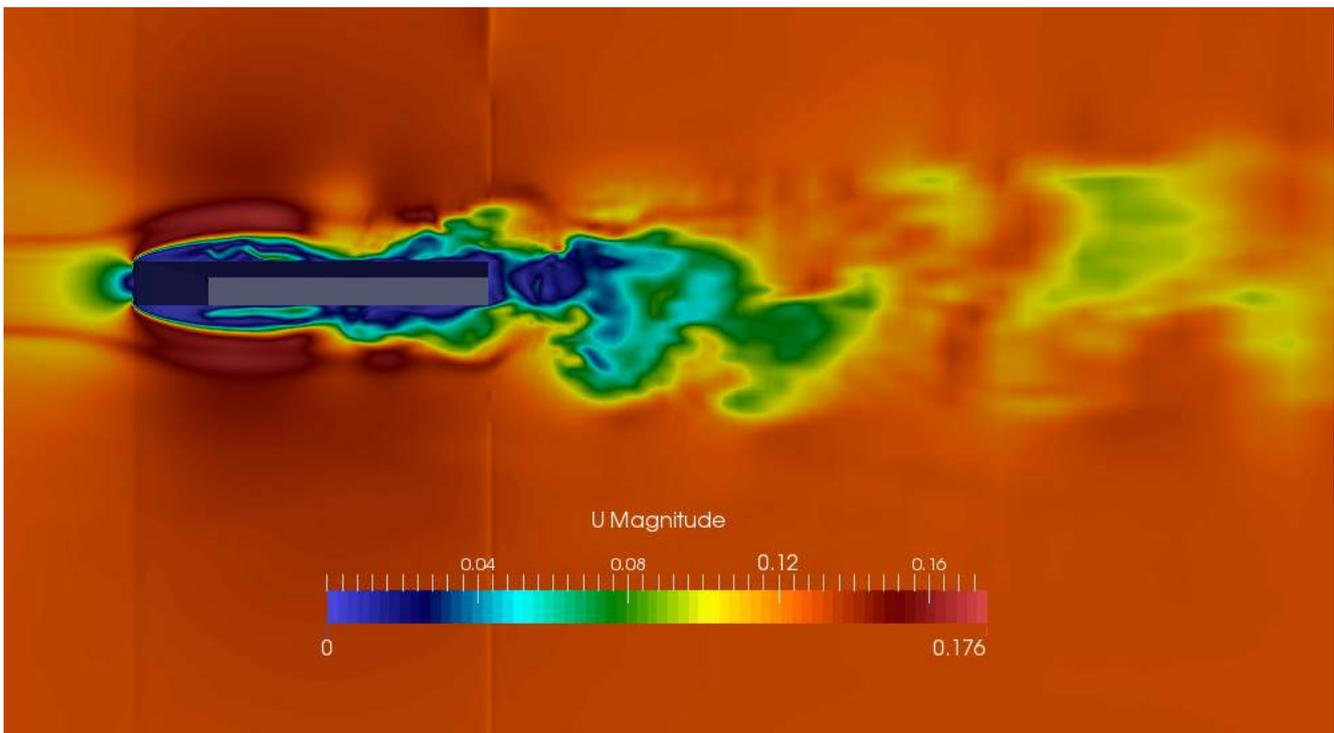
Zu Beginn dieser Thesis (s. Kap. 1) ist bereits festgestellt worden, dass die Untersuchung von Strömungen, in denen sich der betrachtete Querschnitt bereits durch äußere Einwirkungen um seine Querschnittsachse gedreht bzw. geneigt hat, ebenfalls Aufmerksamkeit bedarf. Der nächste Schritt führt folglich zur Frage, ob eine numerische Simulation ebenfalls die Phänomene einer Umströmung eines gegenüber der Horizontalen geneigten Rechtecks reproduzieren kann. Hierzu wird das oben beschriebene Netz und die oben beschriebenen Rand- und Anfangsbedingungen, Parameter, etc., verwendet. Lediglich der umströmte Querschnitt wird in bestimmten Winkeln gegenüber der Horizontalen geneigt (s. Abb. 12.6). Da sich gezeigt hat, dass eine RANS-(LRR)-Modellierung bereits bei einem nicht geneigten Rechteck unbefriedigende Ergebnisse

²In der Originalpublikationen von [47], [48], [46], [30] ist der Koeffizient unter Berücksichtigung der Stirnfläche des Rechtecks statt der Breite bestimmt worden.

³Detached Eddy-Simulation (DES) ist eine Kombination aus RANS und LES.



(a)



(b)

Abbildung 12.4: a) Geschwindigkeitsverteilung der Strömung $R 2.3$ um ein Rechteck (8:1) (LES) ($t=290$ Sek.) a) Übersicht über den Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper

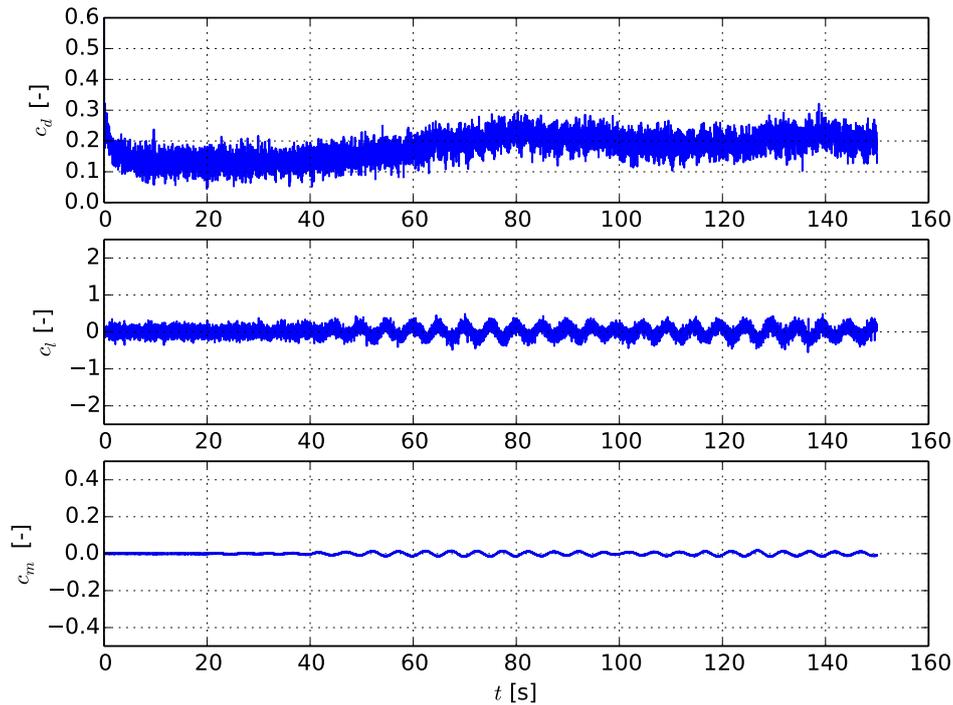


Abbildung 12.5: Kraftgrößenkoeffizienten der Rechteckumströmung R 2.3 (LES).

liefert, ist von der weiteren Verwendung von RANS-Modellen für Rechtecke abzusehen. D. h., die folgenden Simulationen werden ausschließlich mit Hilfe des Smagorinsky-Lilly-(LES)-Modells durchgeführt. Sinnvoll wäre es, jeweils für jede Strömung um den Querschnitt unter einem bestimmten Winkel eine Gitterstudie (wie oben gezeigt) auszuführen. Dies würde den annehmbaren Rechenaufwand jedoch bei Weitem überschreiten. Daher ist entschieden worden, die folgenden Simulationsläufe ausschließlich mit dem Diskretisierungsgrad des Laufes R 2.3 (969792 Hexaeder) zu erstellen. Es sind Strömungssimulatio-

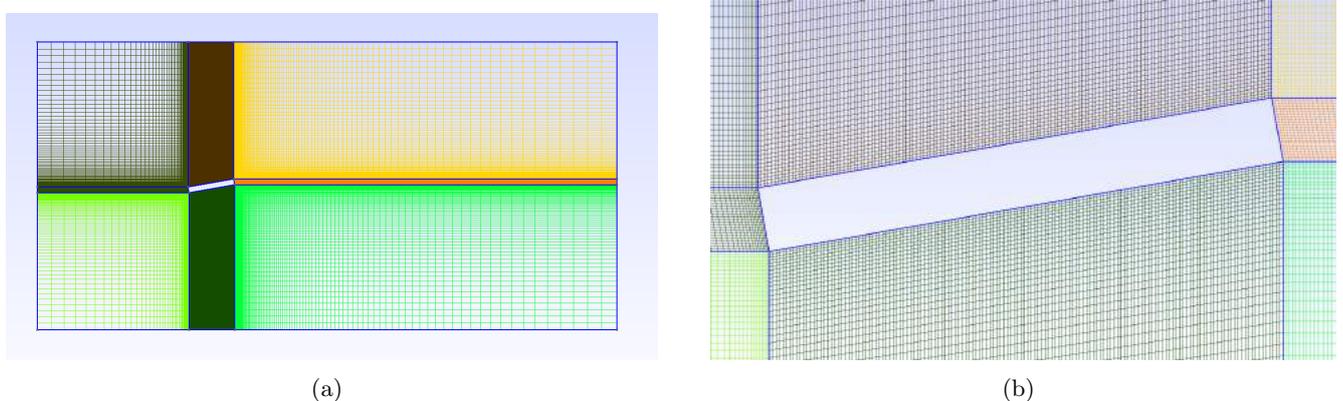


Abbildung 12.6: Geometrie und Netz der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) a) Seitenansicht (LES-3D) b) Detailsansicht um das Rechteck (LES-3D).

Vorliegende Arbeit		Re	$c_{d,avg}$
R 1.1	(U)RANS-2D (LRR)	10^5	0,172
R 1.2	(U)RANS-2D (LRR)	10^5	0,179
R 1.3	(U)RANS-2D (LRR)	10^5	0,194
R 1.4	(U)RANS-2D (LRR)	10^5	0,198
R 1.5	(U)RANS-2D (LRR)	10^5	0,196
R 2.1	LES-3D	10^5	0,161
R 2.2	LES-3D	10^5	0,132
R 2.3	LES-3D	10^5	0,12
R 2.4	LES-3D	10^5	0,134
R 2.5	LES-3D	10^5	0,127
Literatur		Re	$c_{d,avg}$
Ying et al. 2012 [47]	(U)RANS-2D	21400	0,145
Ying et al. 2012 [47]	LES-3D	21400	0,1325
Tamura & Ito [48]	LES-3D	>7000	0,125
Kai Fan Liaw 2005 [30]	DES	10^5	0,1475
Shimada et al. 2002 [46]	(U)RANS-2D	22000	0,1375
Bergmann 2004 [49]	Experiment	10^5	0,12
Bergmann 2004 [49]	Experiment	$2 \cdot 10^5$	0,125

Tabelle 12.4: Widerstandskoeffizient eines Rechtecks. Gegenüberstellung von Simulation und Ergebnissen der Literatur.

nen von unter den Winkeln $-10^\circ, -5^\circ, -2,5^\circ, 0^\circ, 2,5^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ geneigten Rechteckquerschnitten vorgesehen.

12.6.1 Simulationsergebnisse

Aus Platzgründen ist hier nur die Koeffizienten des um -10° geneigten Rechtecks abgebildet. Simulationsergebnisse unter anderen Anstellwinkeln können im Anhang A.1 eingesehen werden.

Wie in Abb. 12.8 zu sehen ist, zeigt die Umströmung eines gedrehten Rechtecks Ablösungen von turbulenten Strukturen im Heckbereich des Querschnitts. Dabei lösen sich Wirbel hoher Geschwindigkeit an der Oberseite des Querschnitts ab. Diese entstehen, wenn Stromlinien, die eng an der Oberseite des Querschnitts verlaufen, auf die obere hintere Kante des Rechtecks treffen. Durch den Anstellwinkel wird der vordere Teil der Unterseite des Querschnitts vom strömenden Fluid abgeschirmt. Hier sinkt die Geschwindigkeit teilweise auf Null herab. Unterhalb dieses Bereichs strömt das Fluid mit erhöhter Geschwindigkeit. An der Kontaktstelle der Schichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit treten Wirbel aufgrund von Reibung an der Schichtgrenze auf. Im hinteren Bereich, unterhalb des Rechtecks, lösen sich große, langsame Wirbel.

Die bisher erörterten Phänomene sind in vergleichbarer Form in der Literatur beschrieben und können daher als plausible Reproduktion von äquivalenten realen Strömungen angesehen werden [46], [50].

Im Bereich zwischen auftretender Wirbelablösung und Auslauf der Strömung, haben sich Form und Größe der Wirbel verändert. Z. T. haben sich die Geschwindigkeiten unterschiedlicher Wirbel angeglichen. Einige Strukturen haben sich mit anderen zusammengeschlossen. Dies lässt darauf schließen, dass das LES-Modell ebenfalls Konvektion, Zerfall und Dissipation von turbulenten Strukturen plausibel re-

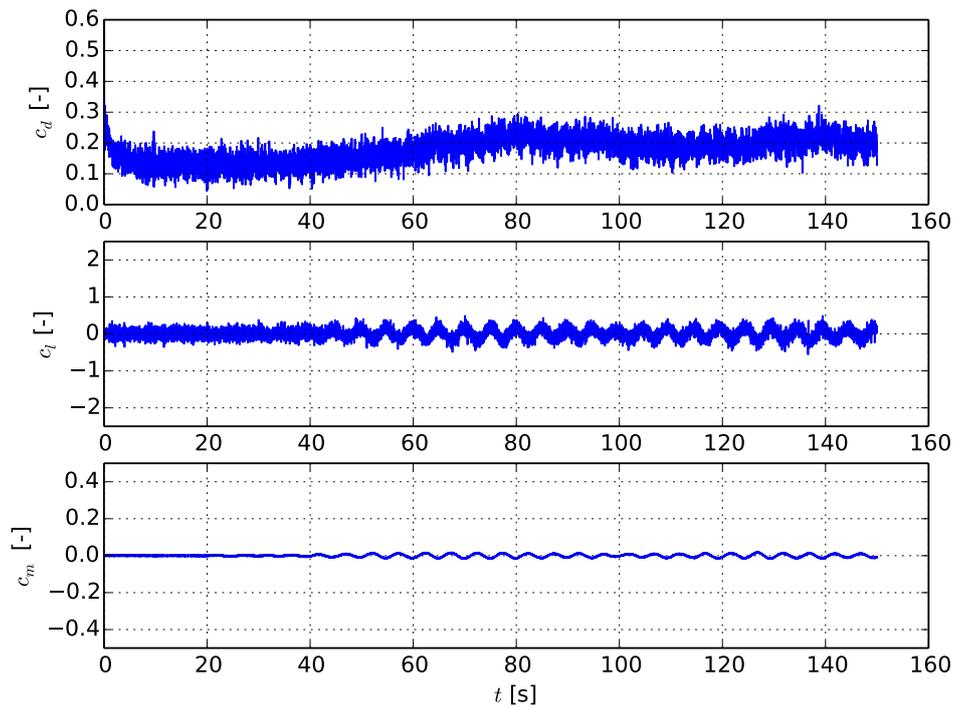
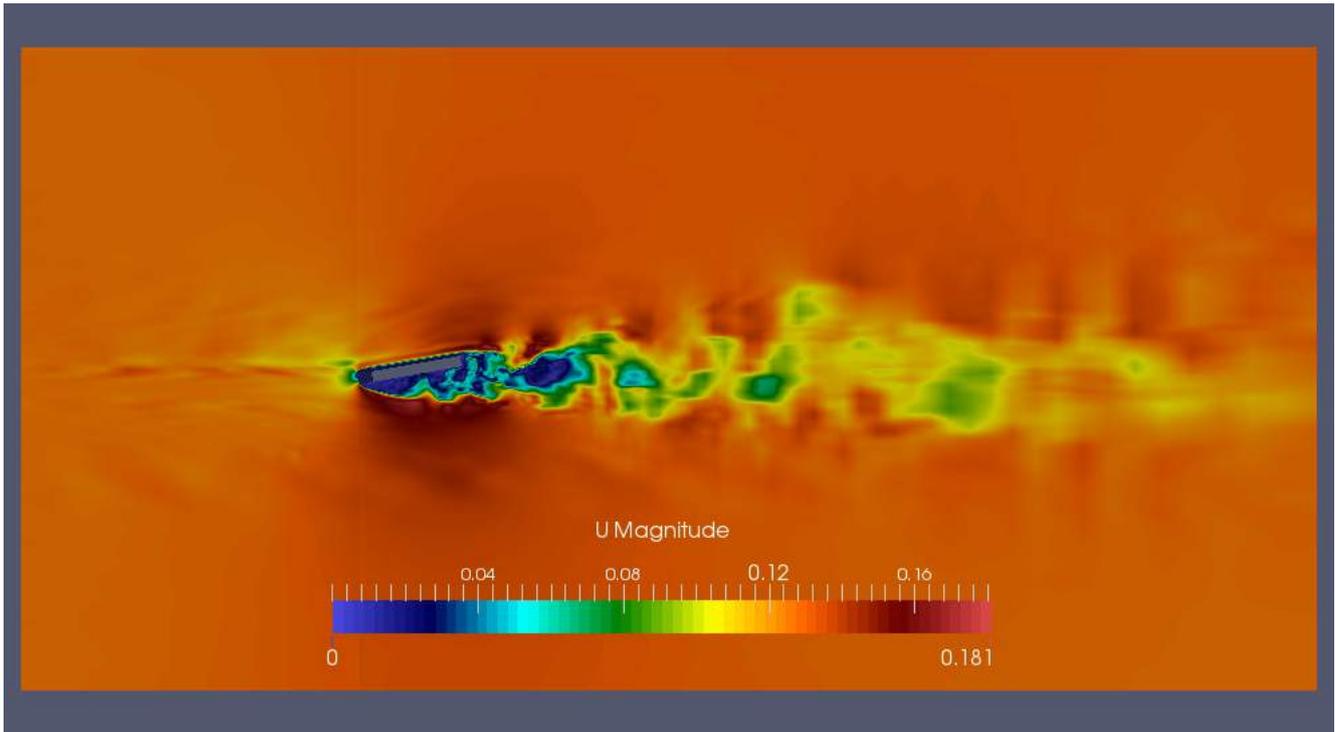


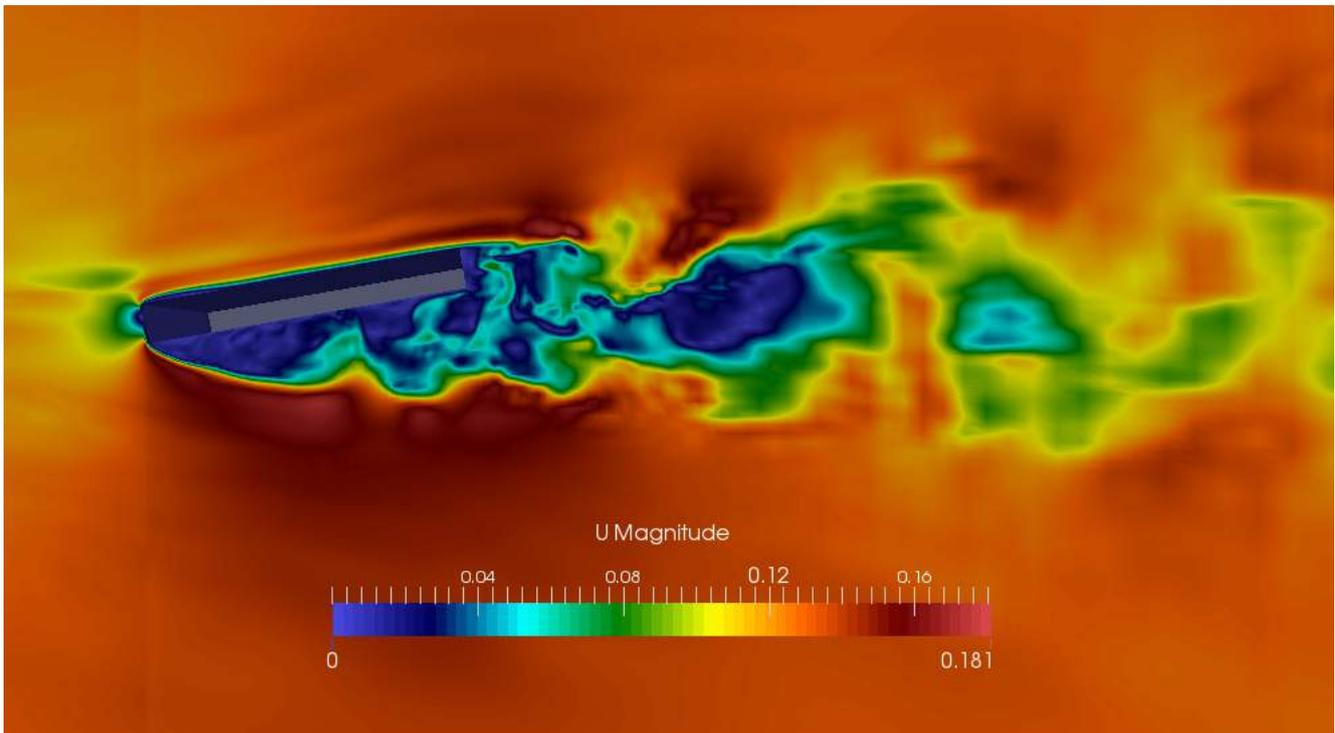
Abbildung 12.7: Kraftgrößenkoeffizienten der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) (LES).

produzieren kann.

Es gilt nun zu klären, ob das LES-Modell auch im Hinblick auf die Kraftbeiwerte die betrachtete Strömung ausreichend genau beschreiben kann. Zur Lösung der Frage werden sämtliche Kraftbeiwerte, ermittelt durch Simulationen, mit experimentell bestimmten Ergebnissen von [49] verglichen (s. Abb. 12.9).



(a)



(b)

Abbildung 12.8: Geschwindigkeitsprofil der Strömung um ein geneigtes Rechteck (-10°) a) Übersicht über den Strömungskanal b) Detailsansicht der Strömung am Rechteckkörper

12.6.2 Vergleich der Beiwerte

Der Vergleich der Beiwerte (s. Abb. 12.9) zeigt, dass das LES-Modell die Koeffizienten generell überschätzt. Die relativen Abweichungen der Auftriebs- und Widerstandskoeffizienten, bezogen auf die Koeffizienten des Experiments, bewegen sich zum überwiegenden Teil zwischen 5 und 10 %. Die Daten der Momentenbeiwerte unterscheiden sich jedoch teilweise um mehr als 100 %. Hier ist jedoch anzumerken, dass sich auch experimentelle Daten untereinander, u. a. bei leichter Variation der Reynoldszahl, im Hinblick auf die Momentenkoeffizienten stark unterscheiden (vgl. [49]).

Es ist festzuhalten, dass die Simulationsergebnisse auf der einen Seite qualitativ den Verlauf der ex-

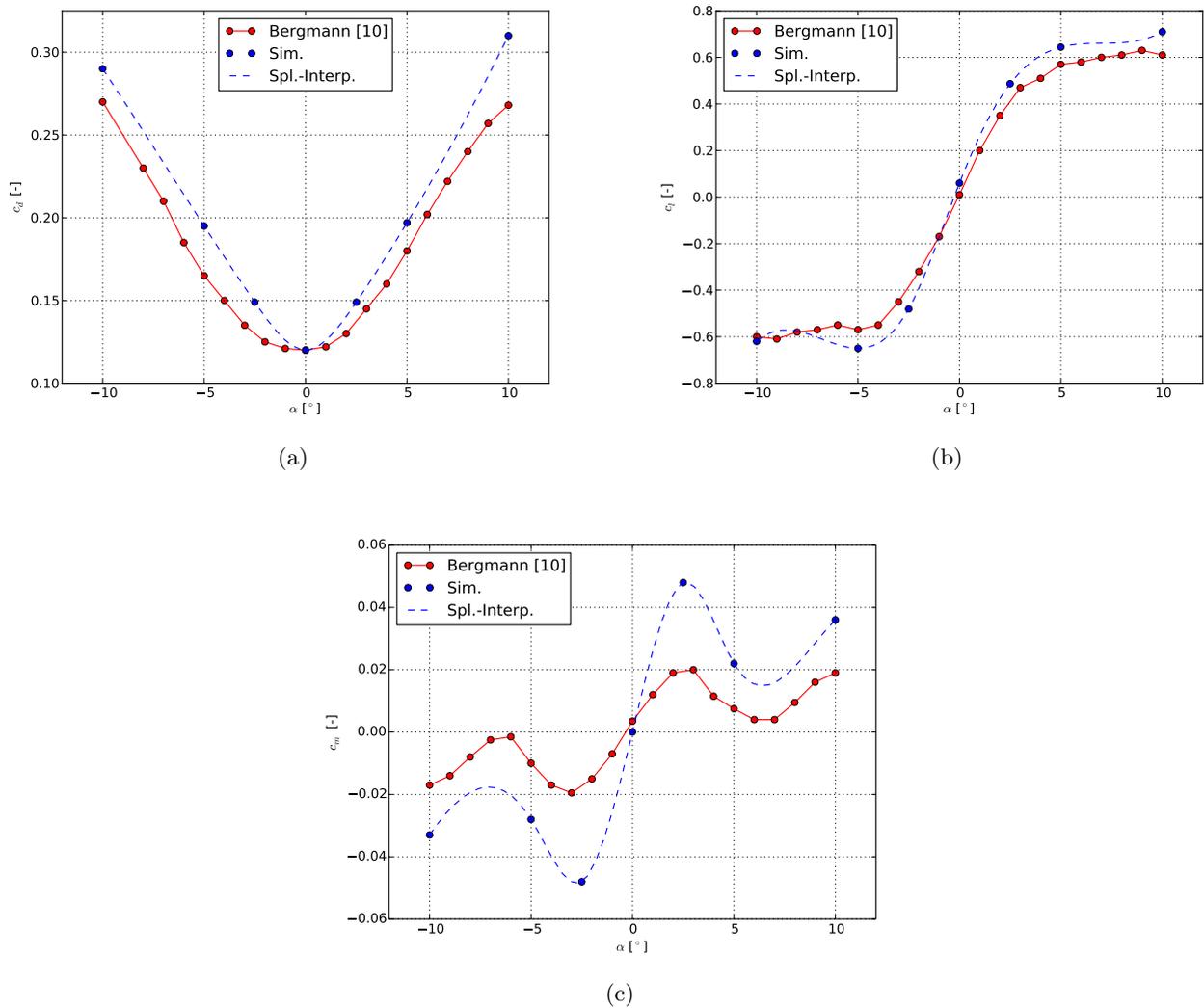


Abbildung 12.9: Kraftgrößenbeiwerte einer Umströmung eines Rechtecks unter verschiedenen Anstellwinkeln; Vergleich von Simulation und Experiment. a) Widerstandskoeffizient b) Auftriebskoeffizient c) Momentenkoeffizient.

perimentell bestimmten Beiwerte reproduzieren. So zeigen z. B. auch die Simulationsergebnisse, dass der Auftriebskoeffizient sich ab einer Neigung von 5 Grad bei weiterer Verdrehung kaum erhöht bzw.

dass die Momentenbeanspruchung bei 2,5 Grad Neigung größer ist als bei 5 Grad. Auf der anderen Seite zeigt der quantitative Vergleich teilweise merkbare Abweichungen, insbesondere im Hinblick auf die Momentenbeiwerte.

13 Umströmung der Tacoma-Narrows-Brigde

Nachdem im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurde, dass die Kraftkoeffizienten bei einer Umströmung eines Rechteckquerschnitts qualitativ und teilweise auch quantitativ durch numerische Simulationen reproduziert werden können, werden im Folgenden Untersuchungen angestellt, welche die Fragestellung betreffen, ob auch eine Umströmung eines bereits in der Realität eingesetzten Brückenquerschnitts durch eine entsprechende numerische Simulation beschrieben werden kann. Zur Erörterung dieser Frage dient ein Modell der 1940 eingestürzten Tacoma-Narrows-Brigde (s. Abb. 13.1 / Kap. 11). Zu diesem Modell liegen Ergebnisse von Untersuchungen in einem Windkanal vor [51], [31]. In diesem Kapitel werden zunächst die relevanten Eckdaten, u. a. Aufbau und Durchführung, der Untersuchungen im Windkanal dargestellt.

Darauf folgend wird das Konzept der äquivalenten numerischen Simulation gezeigt. Abschließend werden die Kraftkoeffizienten resultierend aus Windkanalversuch und Simulation verglichen.

13.1 Messung im Windkanal der Ruhr-Universität-Bochum

Im Dezember 2008 wurden Experimente zur Untersuchung des aerodynamischen und aeroelastischen Verhaltens von Modellbrücken im Windkanal der Ruhr-Universität-Bochum¹ von C. Neuhaus [31] ausgeführt. Verschiedene Querschnitte wurden zu diesem Zweck im Windkanal umströmt. Ziel der Untersuchung war die Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte und der Flutterderivative der Modellquerschnitte. Die Flutterderivative werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Für weitere Informationen über Flutterderivative und ihre Verwendung siehe [51], [31]. In dieser Thesis werden die Versuche zu einem Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde (s. Abb. 13.4) erörtert. Insbesondere werden die im Windkanal gemessenen aerodynamischen Beiwerte dieses Modells herausgestellt. Anhand dieser wird im Kap. 13.4 die Qualität äquivalenter numerischer Simulationen diskutiert.

13.1.1 Aufbau und Durchführung der Versuche

Abb. 13.2 zeigt den schematischen Aufbau des 1976 errichteten Windkanals, der als Versuchskanal der hier beschriebenen Experimente diente. Im hinteren Bereich des Kanals befindet sich ein Rotor, der die Luft im Kanal ansaugt. Seine Rotationsgeschwindigkeit ist variabel. Er kann Strömungsgeschwindigkeiten zwischen 1 und 30 m/s erzeugen. Die Strömungsgeschwindigkeit wird dabei über ein Prandtl-Rohr, welches sich im Kanal befindet, digital gemessen. Ein am Anfang des Kanals installierter Turbulenzgenerator erzeugt im weiteren Verlauf der Strömung turbulente Strukturen. Die scharfkantigen Elemente des Kanalbodens wurden für die betrachteten Versuche mit Platten abgedeckt, sodass sämtliche Wände

¹LuFG Aerodynamik und Strömungsmechanik [34]



Abbildung 13.1: Die 1940 durch eine Resonanzkatastrophe eingestürzte Tacoma-Narrows-Brigde. Quelle: [32]

des Kanals als weitgehend reibungsfrei angesehen werden können [51]. Diese Informationen haben Einfluss auf die Entscheidung, welche Randbedingungen an eine äquivalente numerische Simulation gestellt werden sollten, um den Versuch im Windkanal möglichst exakt abzubilden.

Speziell für die hier beschriebenen Untersuchungen wurde von [31] ein Versuchsstand erstellt, der zur

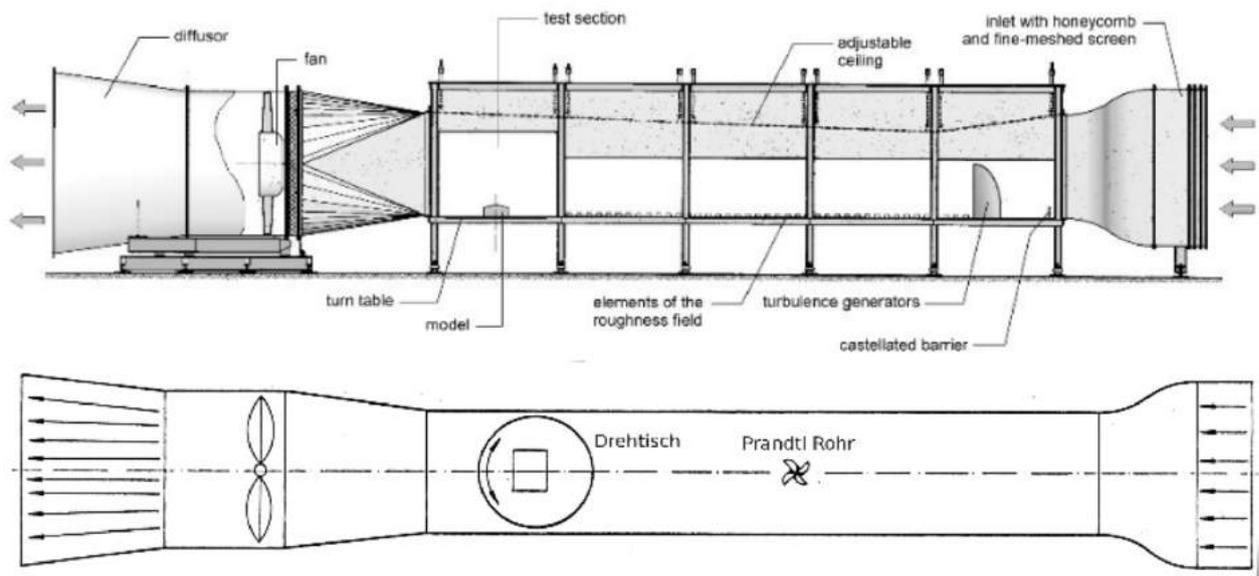


Abbildung 13.2: Schematischer Aufbau des Windkanals der Ruhr-Uni-Bochum. Quelle: [51]

Installation der Modellquerschnitte im Windkanal dient (s. Abb. 13.3). Dieser besteht u. a. aus einem Stahlrahmen, einer Messanlage und einer Achse, die senkrecht zur Strömungsrichtung durch den Windkanal verläuft. An dieser Achse werden die Modelle befestigt. Die Modellachse ist an eine Messanlage angeschlossen. Diese ermöglicht mit Hilfe einer Software die Messung der vertikalen und horizontalen Kräfte auf die Achse sowie die Messung des Moments um die Achse. Die Kräfte sind auf ein strömungsfestes Koordinatensystem (s. Abb. 1.2) bezogen. Die Funktionsweise der Messanlage ist in [51], [31] beschrieben.

Abb. 13.4 zeigt die Installation des Modellquerschnitts im Windkanal mit Hilfe des oben beschriebe-



Abbildung 13.3: Versuchsstand zur Messung von aerodynamischen Kräften. Quelle: [31]

nen Versuchsstandes. Das Modell ist vollständig aus Holz gefertigt und wiegt 4681 g. Eine detaillierte Ansicht des Querschnitts ist in Anhang C einsehbar. Die Modellachse ist über den Versuchsstand drehbar, sodass der Querschnitt gegenüber der Horizontalen geneigt werden kann [31]. Zur Durchführung der Experimente wurde durch den Rotor eine Luftströmung im Windkanal, jeweils mit der Geschwindigkeit 5 m/s und 10 m/s, erzeugt. Dabei wurde der Modellquerschnitt in bestimmten Winkeln gegenüber der Horizontalen geneigt. Die durch die Strömung entstandenen Kräfte bzw. Momente auf die Modellachse wurden gemessen und aufgezeichnet.



Abbildung 13.4: Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde. Foto: [51]/[31]

13.2 Numerische Modellierung der Strömung um den Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde

13.2.1 Geometrie und Randbedingungen

Bei der Modellierung ist darauf geachtet worden, sämtliche Eigenschaften des Windkanalversuchs möglichst genau bzw. detailliert abzubilden. Dennoch sind einige Vereinfachungen zu Gunsten des Rechen- und Modellierungsaufwandes getroffen worden.

Querschotte und der Horizontalverband, der sich unter der Brücke befindet, wurden bei der Erstellung des virtuellen Modells nicht berücksichtigt. Alle weiteren Details des Querschnitts (inkl. Fußgängerwege und Längssteifen unterhalb der Fahrbahn) sind dem Modell hinzugefügt worden (s. Abb. 13.5 b) / vgl. Abb. 13.4).

Aus Gründen des erhöhten Rechenaufwandes sind die tatsächlichen Abmessungen des Windkanals, insbesondere die Ausdehnung senkrecht zur Querschnittsachse, bei der Erstellung des virtuellen Strömungskanals nicht eingehalten worden (s. Abb. 13.5 a)). Dennoch sind Windkanalversuch und Modellierung als vergleichbar anzusehen, da sich in beiden Szenarien die Kanalwände in ausreichender Entfernung zum umströmten Querschnitt befinden, sodass Randeinflüsse ausgeschlossen werden können.

Die im Windkanal eingesetzten verhältnismäßig reibungsfreien Abdeckplatten tragen dazu bei, Randeinflüsse zu minimieren.

Die Reynoldszahl der Strömung im Windkanal (für $u_\infty=5$ m/s) beträgt

$$Re = \frac{b \cdot u_\infty}{\nu} = \frac{0,411 \cdot 5}{1,7 \cdot 10^{-5}} = 120882. \quad (13.1)$$

Die Reynoldszahl der Simulation lautet

$$Re = \frac{0,411 \cdot 0,125}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 51375,0. \quad (13.2)$$

Aus bereits genannten Gründen können Strömungen um scharfkantige Körper im Bereich oberhalb von $Re = 7000$ als reynoldszahlunabhängig angesehen werden. Eine zusätzliche Simulation mit einer doppelt so hohen mittleren Einlassgeschwindigkeit von $0,25 \text{ m/s}$ zeigt keine sichtbaren Abweichungen hinsichtlich resultierender Kraftgrößenkoeffizienten und bestätigt damit die oben genannte Aussage. Aufgrund der CFL-Bedingung ist in Bezug auf die Rechenzeit günstiger, Simulationen mit niedrigeren Geschwindigkeiten zu generieren, da hier das Zeitintervall zwischen den Simulationsschritten entsprechend größer gewählt werden kann. Aus diesem Grund wurden die Modellierungen mit der oben angegebenen Reynoldszahl von 51375 erstellt.

Abb. 13.5 und Tabn. 13.1/13.2 zeigen Geometrie bzw. Rand- und Anfangsbedingungen der Modellierung. Rand- und Anfangsbedingungen sind mit denen der Rechteckumströmung identisch.

Der turbulente Einlass wird ebenfalls wieder eingesetzt. Schließlich ist dieser auch im realen Windkanal vorhanden. Die Ausführung einer Gitterstudie hat sich bei der Untersuchung der Rechteckumströmung als hilfreich erwiesen. Durch diese war es möglich den Einfluss des Diskretisierungsgrades auf die resultierenden Kraftgrößenkoeffizienten zu erörtern. Der wiederholte Einsatz einer Gitterstudie für die Strömung um den hier betrachteten Querschnitt liegt daher nahe. Die Gitterstudie umfasst vier RANS- und fünf LES-Simulationen mit unterschiedlichen Gitternetzichten. Die jeweils eingesetzte Anzahl an Gitterzellen (Hexaeder) ist in Tab. 13.3 dokumentiert. Es wird ein strukturiertes Netz verwendet. Sämtliche Simulationen werden mit der Software OPENFOAM durchgeführt.

Nähert man sich vom Kanalrand her dem umströmten Querschnitt werden die Gitterzellen kontinuierlich

Rand	Bedingung an \vec{u}	Bedingung an p
Einströmrand (turbulent)	$\bar{u}_x = U_\infty; \bar{u}_y = 0; (u_z = 0)$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Ausströmrand	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$p = 0$
Rand (oben/unten)	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Rand (Front-/Rückseite) (nur LES-3D)	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
Querschnitt der TNB	$\vec{u} = \vec{0}$	$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$

Tabelle 13.1: Randbedingungen.

$u_x = U_\infty; u_y = 0; (u_z = 0)$	$p = 0$
--------------------------------------	---------

Tabelle 13.2: Anfangsbedingungen des inneren Netzes.

kleiner, denn Turbulenz bzw. Geschwindigkeits- und Druckschwankungen findet am und um den Querschnitt statt. Diese Bereiche müssen dementsprechend durch kleinere Gitterzellen höher aufgelöst werden. Die Rechenzeit der RANS-Simulation beträgt unter Verwendung von 16 Prozessoren bis zu 24 Stunden. Die LES-Modellierungen benötigen unter Einsatz von 96 Prozessoren bis zu 60 Stunden Rechendauer.

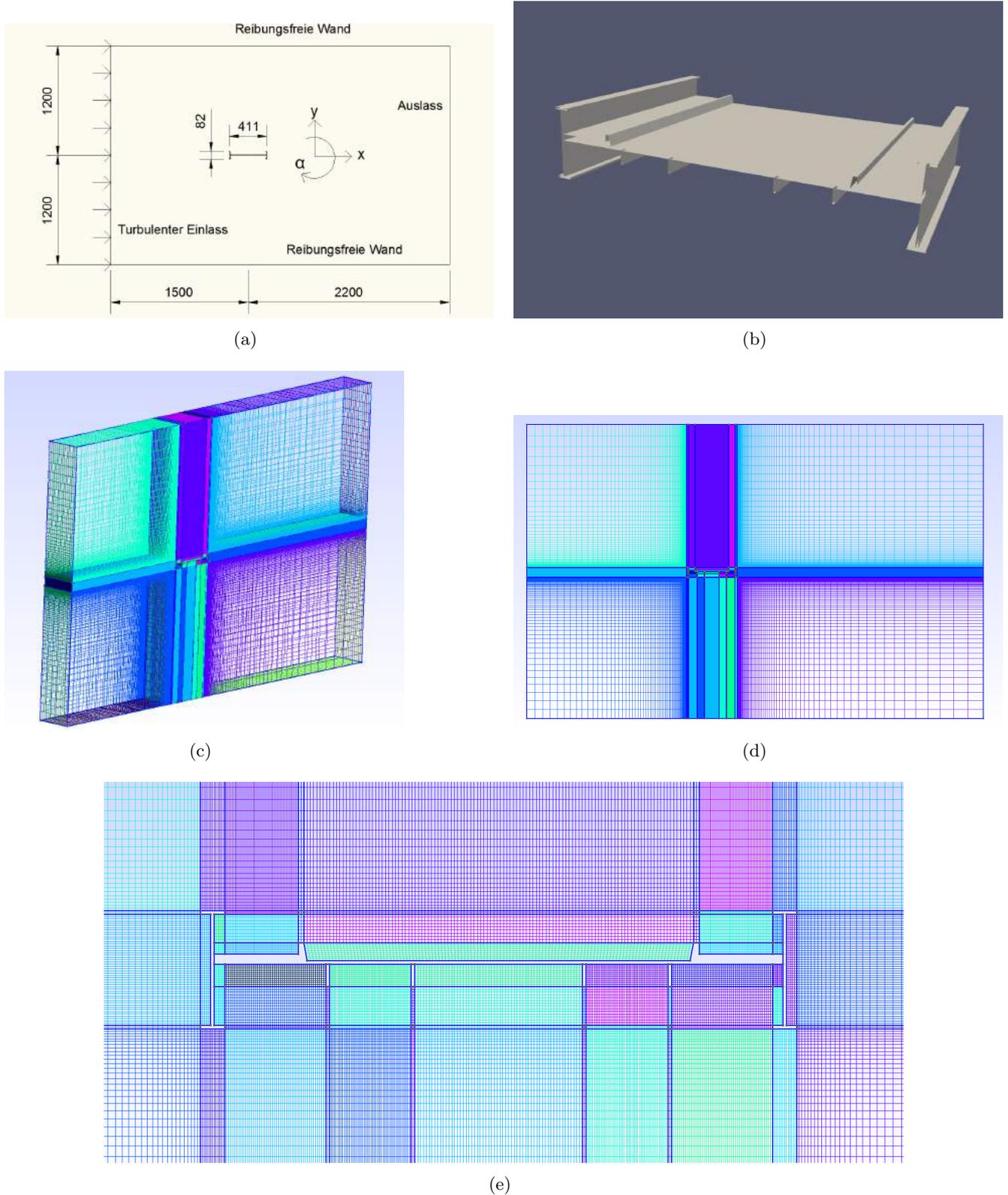


Abbildung 13.5: a) Geometrie der virtuellen Strömung um den Querschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde (RANS und LES). Angaben in [mm]. Ausdehnung des Strömungskanals senkrecht zur Zeichenebene bei der LES-3D-Simulation beträgt 300 mm. b) Virtueller Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde c)/d) Übersicht über das Gitternetz des Strömungskanals (LES) e) Detailsansicht im Bereich des Querschnitts.

Simulation (lfd. Nr.)	Turbulenzmodell	Anzahl der Zellen (Hexaeder)
T 1.1	(U)RANS-2D (LRR)	34978
T 1.2	(U)RANS-2D (LRR)	62735
T 1.3	(U)RANS-2D (LRR)	82981
T 1.4	(U)RANS-2D (LRR)	115456
T 2.1	LES-3D (Smagorinsky)	499436
T 2.2	LES-3D (Smagorinsky)	649152
T 2.3	LES-3D (Smagorinsky)	892990
T 2.4	LES-3D (Smagorinsky)	1262184
T 2.5	LES-3D (Smagorinsky)	1630160

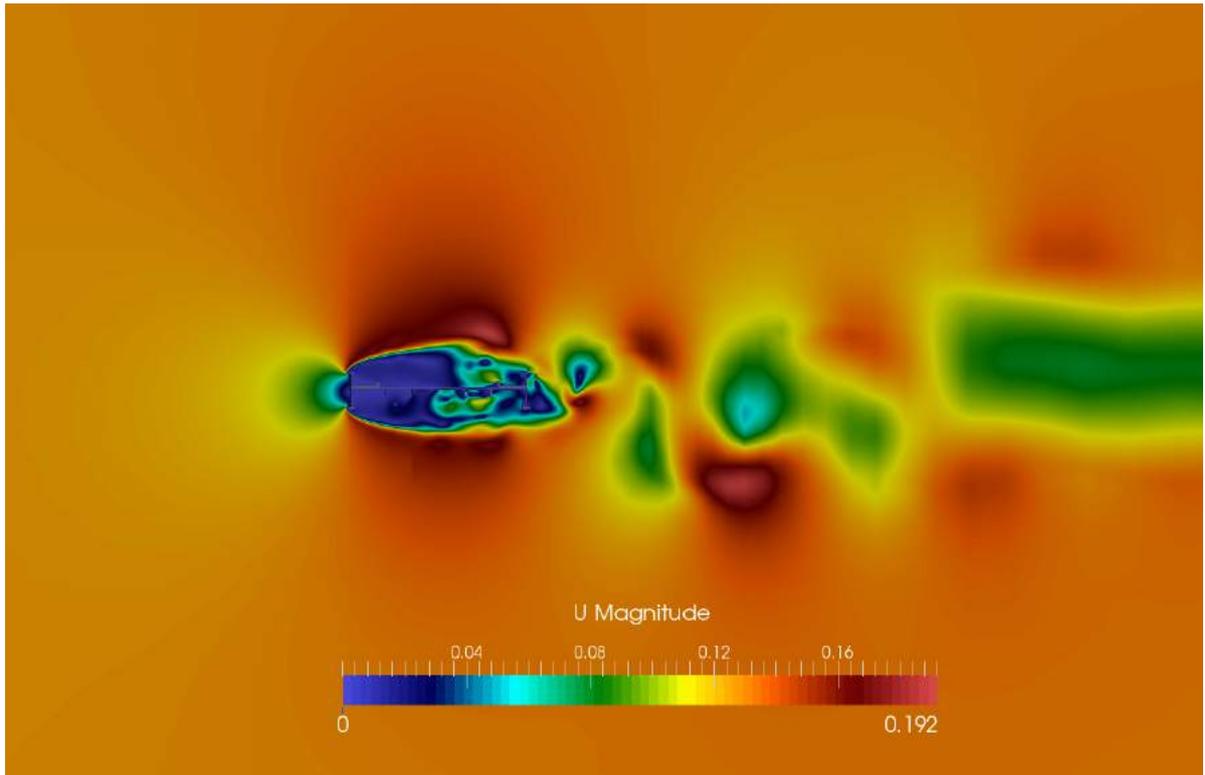
Tabelle 13.3: Anzahl der genutzten Zellen und verwendete Turbulenzmodelle für die Umströmung des Modellquerschnitts des Tacoma-Narrows-Brigde ($Re \approx 0,5 \cdot 10^4$). Die Anzahl der Gitterzellen in z -Richtung beträgt bei den dreidimensionalen Simulationen jeweils 15.

13.2.2 Simulationsergebnisse

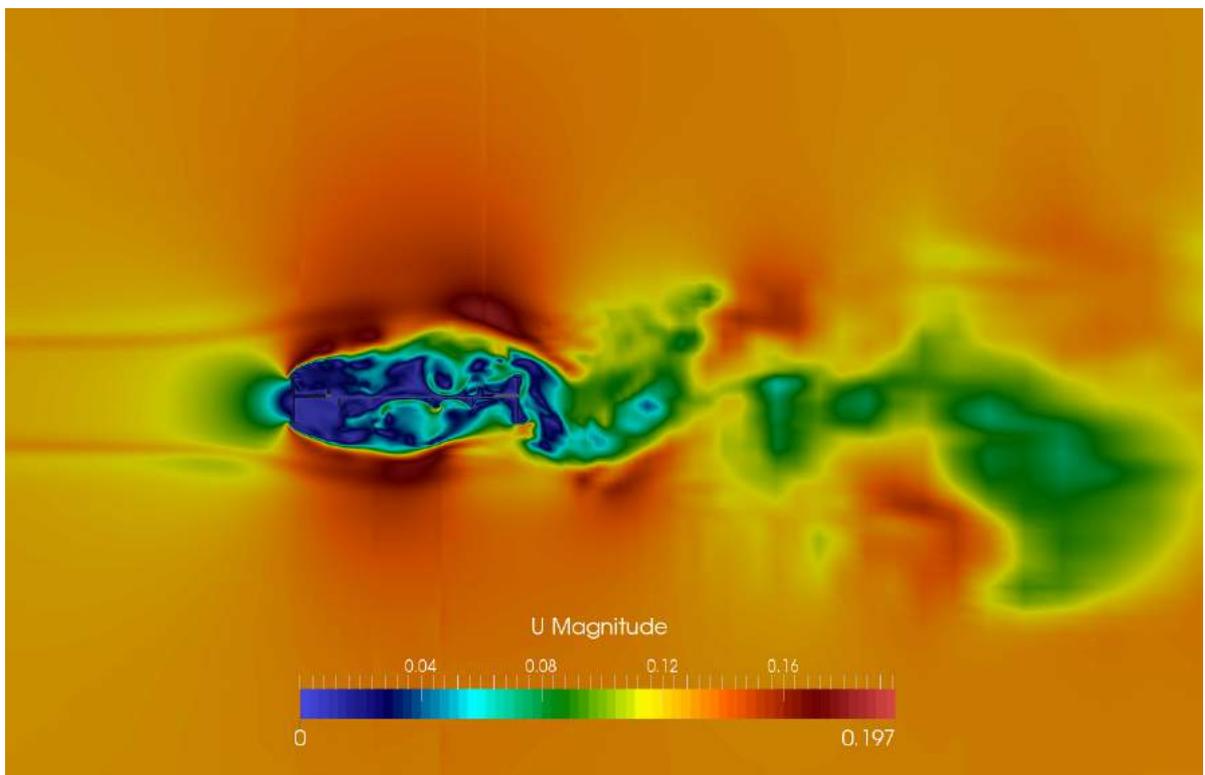
Die durch RANS- und LES-Modell generierten Geschwindigkeitsprofile (s. Abb. 13.6 a) / b)) der Strömung zeigen plausible Phänomene, die bereits durch Kenntnis der Profile der Rechteckumströmung erwartet werden konnten. Die Stromlinien müssen dem linken I-Profil der Brückenprofils ausweichen, werden dementsprechend oberhalb bzw. unterhalb am Querschnitt vorbei geführt und nähern sich am Heck wieder der Brücke. Am Heck der Brücke lösen sich turbulente Wirbel, die einen Nachlauf bilden. Dabei dissipieren diese Strukturen teilweise oder schließen sich mit anderen Strukturen zusammen. Im „Strömungsschatten“ des linken I-Profiles bildet sich ein Abschnitt, der weitgehend von den Stromlinien abgeschirmt wird. Der direkte Vergleich zwischen der RANS- und der LES-Simulation (s. Abb. 13.6 a) / b)) zeigt ähnliche Unterschiede zwischen den Modellen gegenüber der Rechteckumströmung. Viele Bereiche, insbesondere Wirbel um den Querschnitt, sind bei der RANS-Simulation hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit weitaus homogener. D. h. Strukturen generell werden gegenüber der LES-Simulation unpräziser dargestellt. Optisch betrachtet wirkt das Geschwindigkeitsprofil der RANS-Simulation wie eine Glättung des Profils der LES-Modellierung. Dies ist durchaus plausibel, denn es ist bekannt, dass eine RANS-Modellierung erheblichere Vereinfachungen (u. a. Zeitmittelung) trifft. Die LES-Simulation zeigt mehrere turbulente Wirbel unterhalb bzw. oberhalb der linken Fahrbahn des Querschnitts, die RANS-Modellierung zeigt an dieser Stelle lediglich einen großen Bereich, in dem vernachlässigbare Strömungsbewegungen stattfinden (Geschwindigkeit ≈ 0).

Am Heck des Querschnitts treten in beiden Fällen Wirbelablösungen auf, die einen Nachlauf bilden, welcher der Karmanschen Wirbelstraße in Ansätzen ähnelt. Die Wirbel der RANS-Simulation sind dabei homogener in Bezug auf ihre innere Geschwindigkeitsverteilung und in Bezug auf Form und Größe gegenüber anderen Wirbeln. Die LES-Modellierung zeigt dagegen heterogene Wirbelformen, die sich bezüglich Art und Größe stärker voneinander unterscheiden. Weiterhin fällt auf, dass die LES-Simulation eine höhere Zahl von kleineren Wirbeln aufweist.

Im Einklang mit den Ergebnissen der Rechteckumströmung lässt sich sagen, dass sowohl das LES- als auch das RANS-Modell die Phänomene der Strömung um den Modellquerschnitt qualitativ plausibel abbilden. Mit dem LES-Modell lassen sich jedoch Entstehung, Konvektion und Dissipation von turbulenten



(a)



(b)

Abbildung 13.6: Ausschnitt des Geschwindigkeitsprofils der Strömung im Bereich des Brückenquerschnitts. a) RANS (62735 Zellen) b) LES (892990 Zellen).

Strukturen detaillierter bzw. differenzierter darstellen.

Die Schwingungen in den zeitlichen Verläufen der Kraftgrößenkoeffizienten (s. Abb. 13.7) beider Simu-

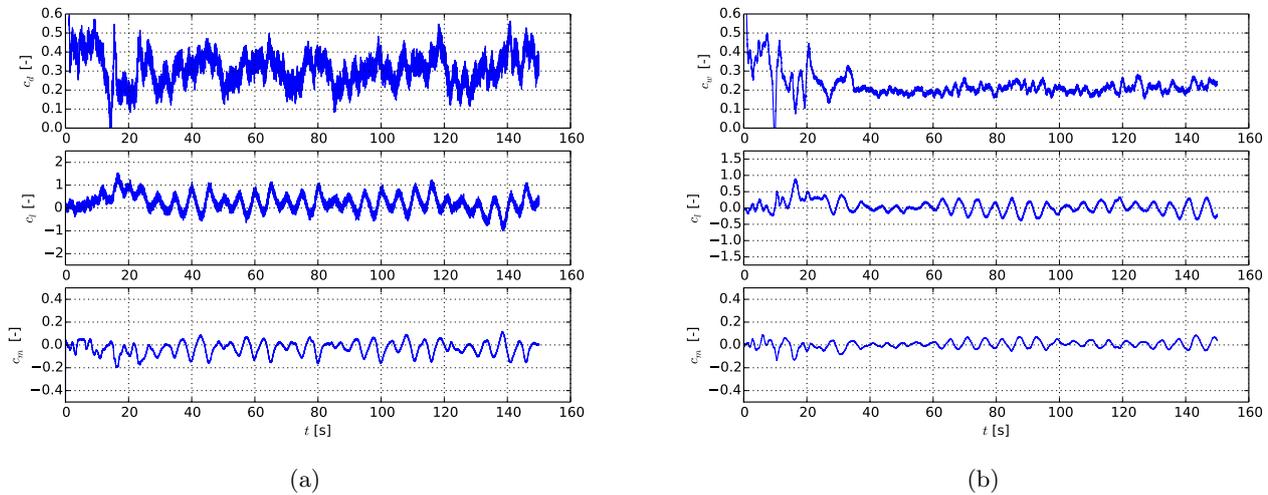


Abbildung 13.7: Zeitlicher Verlauf der Kraftgrößenkoeffizienten. a) RANS (62735 Zellen)
b) LES (892990 Zellen).

lationen zeigen die unregelmäßigen Wirbelablösungen am Heck des Querschnitts. Die Schwingamplitude der Kraftgrößenbeiwerte der RANS-Modellierung ist gegenüber denen der LES-Modellierung jeweils wesentlich größer. Die Beiwerte der RANS-Simulation weisen weiterhin mit $c_{d,avg} = 0,319$, $c_{l,avg} = -0,169$ und $c_{m,avg} = -0,026$ jeweils einen höheren Mittelwert (Mittelwertbildung ab Sekunde 100) auf.

Zum Vergleich: Die Mittelwerte der LES-Simulation betragen: $c_{d,avg} = 0,211$, $c_{l,avg} = -0,016$ und $c_{m,avg} = -0,009$. Bei Variation des Diskretisierungsgrades ändern sich die resultierenden Beiwerte, insbesondere der Widerstandskoeffizient (s. Tab. 13.4) nur unwesentlich. Es kann folglich davon ausgegangen werden, dass die Koeffizienten für einen großen Bereich von unterschiedlichen Netzdichten stabil sind.

Bei Vergleich der Widerstandsbeiwerte zeigt sich, dass die RANS-Modellierung den im Experiment gemessenen Widerstandskoeffizienten deutlich überschätzt ($\approx 26\%$). Aufgrund der hohen Abweichung wird von der weiteren Verwendung des RANS-(LRR)-Modells abgesehen. Das LES-Modell unterschätzt den Widerstandsbeiwert. Die Abweichung ist hier mit $\approx 10\%$ wesentlich geringer, sodass sich weitere Untersuchungen und Vergleiche zwischen LES-Modellierung und Windkanalergebnissen lohnen.

13.3 Numerische Modellierung der Strömung um den geneigten Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brücke

Analog zur Untersuchung der Rechteckumströmung soll im Folgenden das Verhalten der Strömung bei Neigung des Brückenquerschnitts gegenüber der Horizontalen analysiert werden. Zur folgenden Analyse wird das Szenario T 2.2 verwendet. Trotz der gegenüber den Simulationsläufen T 2.3, T 2.4 und T 2.5 niedrigeren Netzdichte (649152 Hexaeder) zeigt dieses Szenario qualitativ wie quantitativ nur vernachlässigbare Unterschiede gegenüber feiner diskretisierten Szenarien. Zur Minimierung des Rechenauf-

Vorliegende Arbeit		Re	$c_{d,avg}$
T 1.1	(U)RANS-2D (LRR)	51375	0,308
T 1.2	(U)RANS-2D (LRR)	51375	0,319
T 1.3	(U)RANS-2D (LRR)	51375	0,3
T 1.4	(U)RANS-2D (LRR)	51375	0,284
T 2.1	LES-3D	51375	0,211
T 2.2	LES-3D	51375	0,211
T 2.3	LES-3D	51375	0,216
T 2.4	LES-3D	51375	0,204
T 2.5	LES-3D	51375	0,208
Windkanalversuch		Re	$c_{d,avg}$
Neuhaus	Experiment	120882	0,225
Neuhaus	Experiment	241784	0,227

Tabelle 13.4: Widerstandskoeffizient der Tacoma-Narrows-Bridge. Gegenüberstellung von Simulation und Windkanalversuch.

wands wird dieses Szenario dementsprechend ausschließlich genutzt. Von Gitterstudien für jede einzelne Umströmung der Brücke unter einem anderen Winkel ist aus Gründen der Rechenkosten abgesehen worden. Rand- und Anfangsbedingungen sowie sonstige Parameter wurden nicht verändert. Die folgende Untersuchung umfasst die Analyse der Strömung um den Modellquerschnitt unter dem Anstellwinkel von -10° , $7,5^\circ$, -5° , $-2,5^\circ$, 0° , $2,5^\circ$, 5° , $7,5^\circ$ und 10° . Abb. 13.8 zeigt das Gitternetz der Strömung um die um 10° geneigte Brücke.

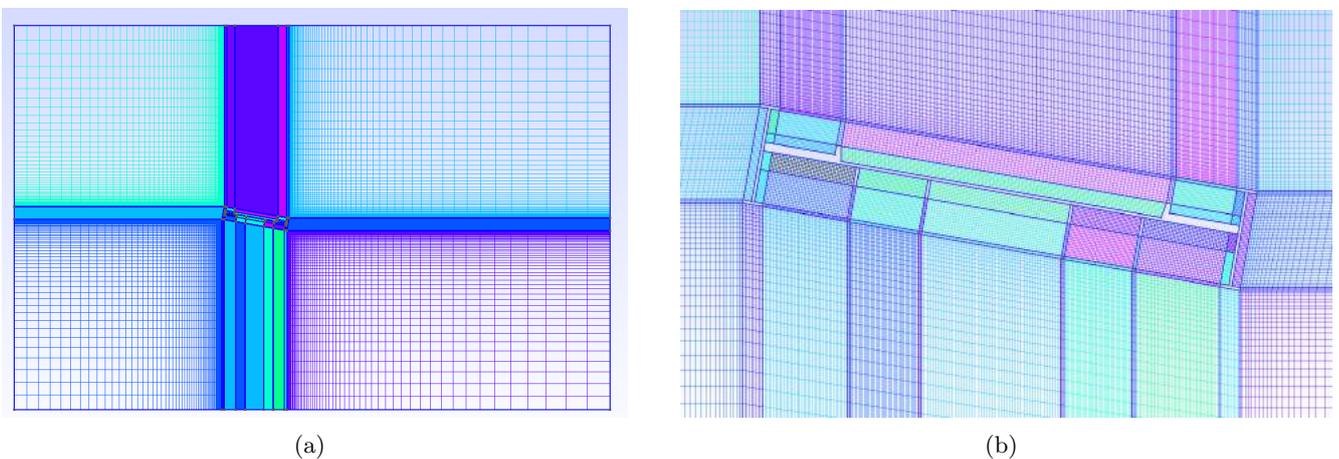
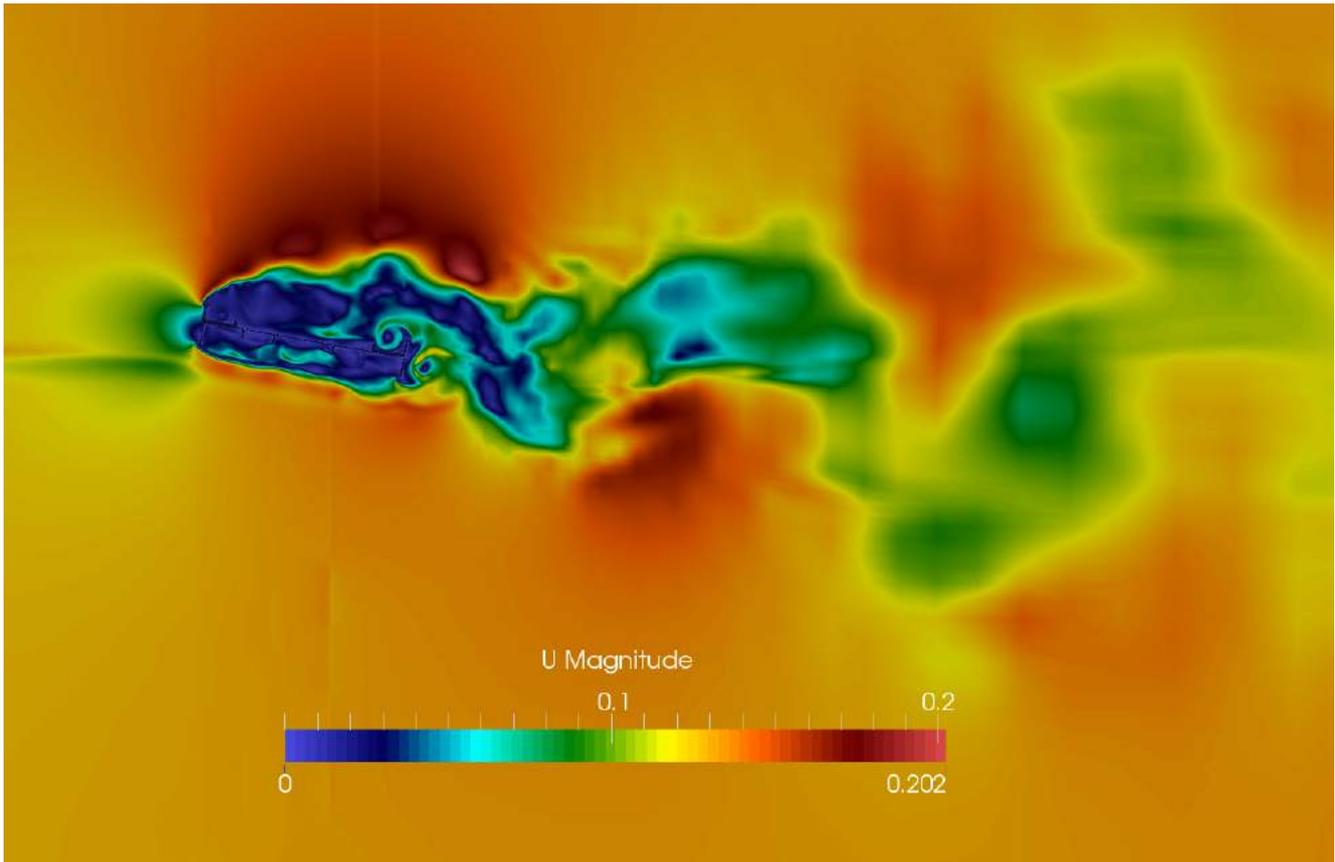


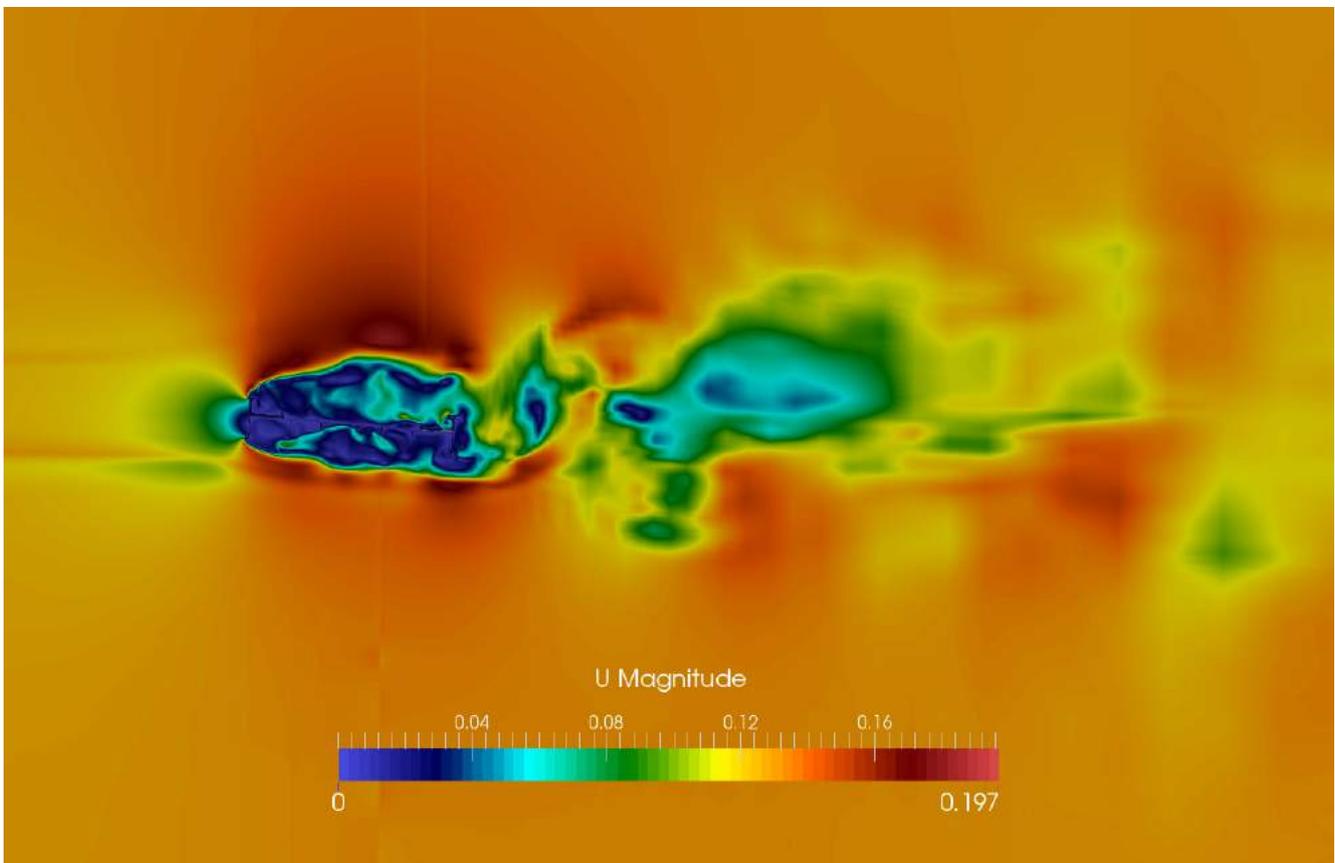
Abbildung 13.8: Netz der Strömung um die geneigte Brücke a) Übersicht
b) Detailsansicht im Bereich der Brücke.

13.3.1 Simulationsergebnisse

In Abb. 13.9 ist der direkte Vergleich der Geschwindigkeitsprofile der Strömungen um die -10° bzw. -5° geneigte Brücke dargestellt. Beide Simulationen zeigen die bereits durch andere Modellierungen be-



(a)



(b)

Abbildung 13.9: Ausschnitt des Geschwindigkeitsprofils der Strömung im Bereich des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 10° b) Neigung um 5° .

kannten und daher zu erwartenden Phänomene. Im Schutze des linken I-Profiles der Brücke bildet sich eine beinahe bewegungslose Schicht oberhalb und unterhalb der Fahrbahn. Durch die Scherung schneller Stromlinien an der sich kaum bewegenden Schicht kommt es zu turbulenten Strukturen. Am Heck des Querschnitts lösen sich turbulente Wirbel unterschiedlicher Größe und Form ab und bilden einen Nachlauf. Die Strukturen verbinden bzw. vermischen sich teilweise mit Nachbarstrukturen.

Durch die größere Neigung des Querschnitts (s. Abb. 13.9 a)) bildet sich ein umfangreicherer Bereich

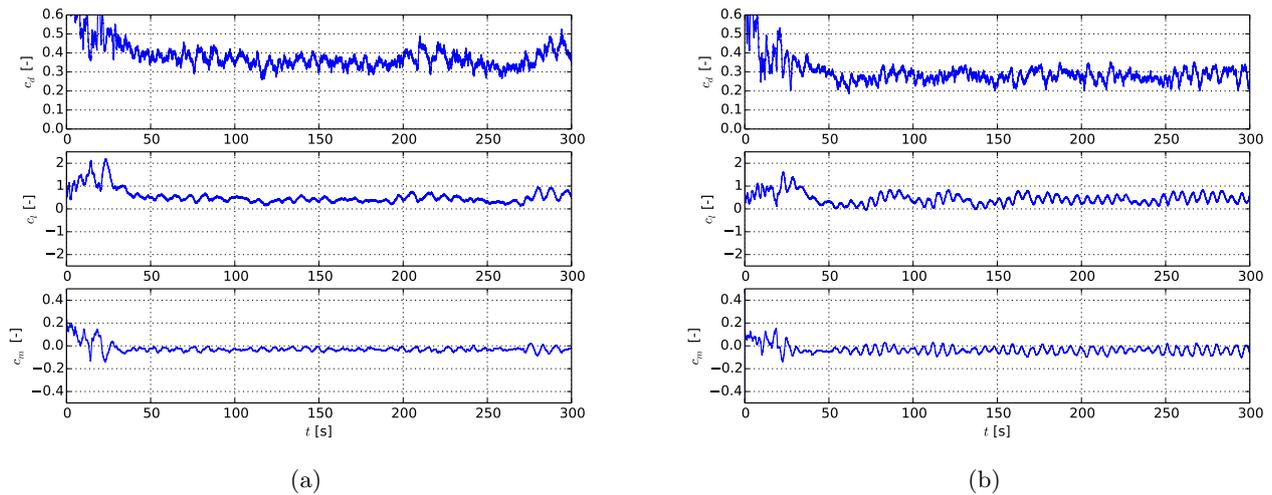


Abbildung 13.10: Kraftgrößenkoeffizienten der Strömungen um die geneigte Tacoma-Narrows-Brigde a) Neigung um 10° b) Neigung um 5° .

oberhalb der Brücke, der von den Stromlinien abgeschirmt wird. Die Stromlinien bewegen sich dort dementsprechend in weiterer Entfernung zum Querschnitt an ihm vorbei und werden in diesem Bereich enger zusammengestaucht. Folglich ist hier auch die Geschwindigkeit größer. Im Heckbereich des Querschnitts lösen sich größere Wirbel ab, die sich nicht nur ausschließlich in x-Richtung bewegen, sondern sich auch nach oben bzw. unten vom Heck des Querschnitts entfernen.

13.4 Vergleich von Windkanalversuch und numerischer Modellierung

Die resultierenden Kraftkoeffizienten der virtuellen bzw. realen Strömungen um den Modellquerschnitt der Tacoma-Narrows-Brigde sind in Abb. 13.11 zu sehen. Man betrachte zunächst den Vergleich der Widerstandskoeffizienten (Abb. 13.11 a)). Die Asymmetrie des Querschnitts zeigt sich in den Ergebnissen des Experiments deutlich. Der Widerstandsbeiwert bei 10° Neigung ist beispielsweise deutlich kleiner als der Beiwert bei Neigung des Querschnitt um den selben Winkel in die andere Richtung. Die Simulationsergebnisse zeigen diese Asymmetrie nicht. Während die Modellierung die Strömung im Windkanal hinsichtlich des Widerstandsbeiwertes bei Drehung des Querschnitts gegen den Uhrzeigersinn offenbar gut reproduziert, zeigen sich bei Drehung mit dem Uhrzeigersinn wesentliche Abweichungen der Beiwerte (bis zu 22 % des Wertes aus dem Versuch). Grund für die Abweichung könnte die Vernachlässigung der Querschotte und des Horizontalverbands unterhalb der Brücke bei der Generierung des virtuellen Modells

sein.

Bei Betrachtung der Auftriebskoeffizienten (s. Abb. 13.11 b)) fällt auf, dass der Verlauf der Werte aus

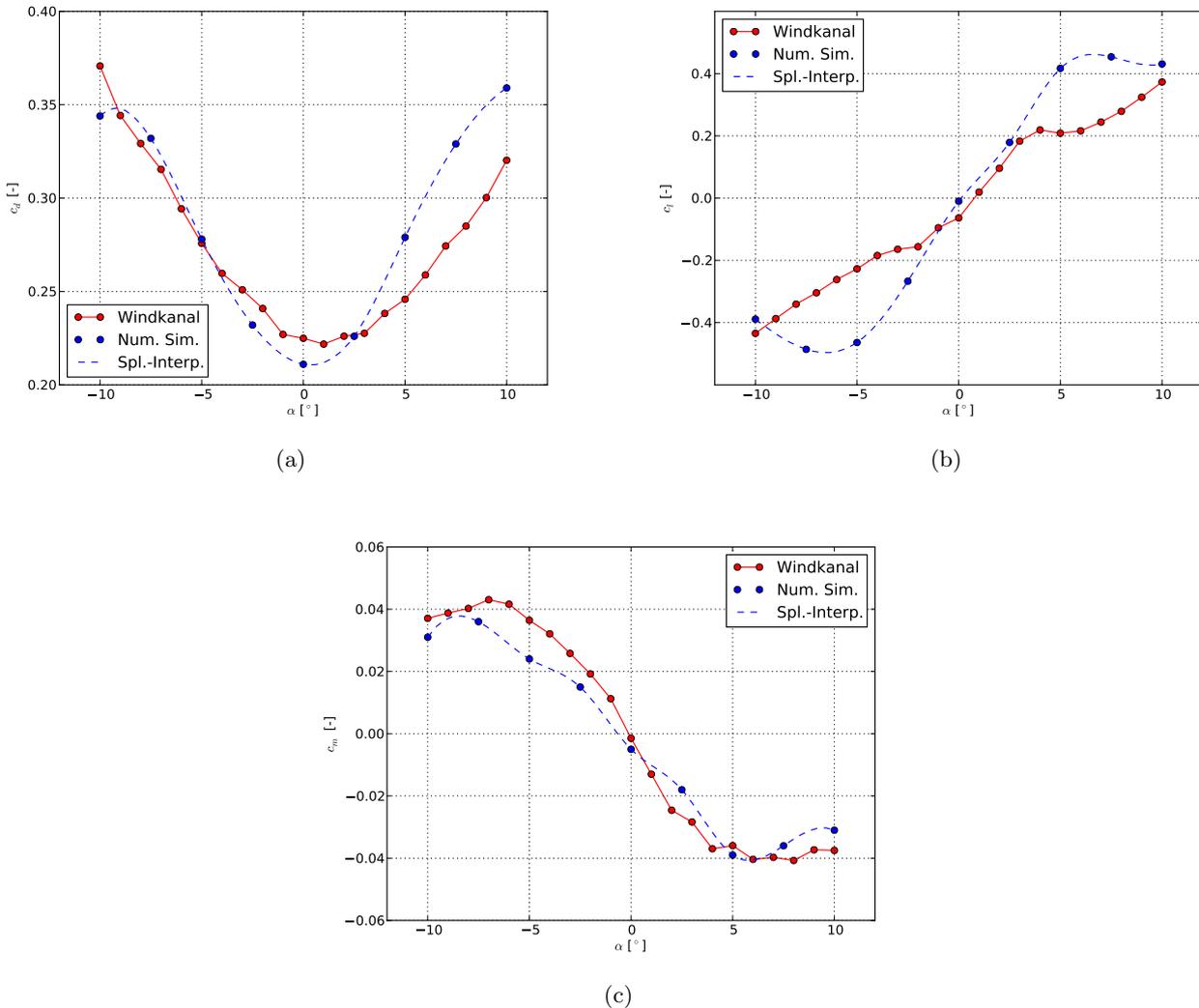


Abbildung 13.11: Vergleich der Kraftkoeffizienten der Tacoma-Narrows-Brigde.

der Simulation den Ergebnissen der Rechteckumströmung ähnelt. Bereits bei einer Neigung von 5° bis -5° liegt der Auftriebskoeffizient bei ca. -0,4 bzw. ca. 0,4. Bei weiterer Neigung bleibt der Beiwert konstant bzw. steigt zunächst und fällt dann wieder zwischen $\pm 7,5^\circ$ und $\pm 10^\circ$. Die im Windkanal ermittelten Auftriebskoeffizienten steigen dagegen im Bereich zwischen $\pm 5^\circ$ und $\pm 10^\circ$ kontinuierlich (approx. linear) an. Das müsste bedeuten, dass der virtuelle Querschnitt im Gegensatz zum Windkanalmodell sich eher wie ein voll ausgefülltes Rechteck verhält. Die experimentell bestimmten Beiwerte werden damit in diesem Bereich ausnahmslos durch die Modellierung überschätzt. Die Vernachlässigung der Querschotte und des Horizontalverbands kann nicht der Grund für dieses Verhalten sein, da die Berücksichtigung dieser diesem Verhalten anschaulich betrachtet noch beitragen müsste. Für das abweichende Verhalten sind viele Gründe möglich. Wahrscheinlich ist, dass das LES-Modell Strömungsbewegungen der Bereiche

unmittelbar ober- und unterhalb der Fahrbahn und des Fußgängerwegs nicht in ausreichendem Maße abbildet. Die Abweichungen der Auftriebskoeffizienten betragen teilweise über 100 %.

Vergleicht man die normierten Momentenbeanspruchungen, stellt man fest, dass die experimentellen Daten in Bezug auf die Qualität gut durch die simulierten Beiwerte reproduziert werden. Es fällt weiterhin auf, dass die quantitativen Abweichungen zwischen den Beiwerten gegenüber denen der Rechteckumströmung wesentlich geringer ausfallen. Die Momentenbeanspruchungen werden dabei durch die Modellierung überwiegend unterschätzt (Abweichungen bis zu 36 %).

Insgesamt sind die Simulationsergebnisse als unbefriedigend einzustufen, da diese nicht nur quantitative, sondern insbesondere auch hinsichtlich des Widerstands- und Auftriebskoeffizienten qualitative Differenzen zeigen.

Teil V

Schlussbetrachtungen

14 Fazit und Ausblick

14.1 Fazit

Die Untersuchung der Aerodynamik eines Brückenquerschnitts ist nur der erste Schritt bei der Bemessung einer Brücke. Die Aerodynamik gibt lediglich Auskunft über die Beanspruchungen, die ein starrer und unbeweglicher Körper in einer Strömung erfährt. Die Aeroelastik des Körpers, d.h., die Analyse der resultierenden Verformung, Verdrehung oder Verschiebung des Körpers, ist darin nicht enthalten. Doch schon die numerische Analyse der Aerodynamik von Brücken oder brückenähnlichen Körpern durch OPENFOAM scheitert aufgrund der mangelnden Qualität der numerisch erzeugten Ergebnisse der LES-Modellierung. Während die Strömung um ein Rechteck hinsichtlich der resultierenden Kraftkoeffizienten qualitativ in ausreichender Form durch eine numerische Modellierung reproduziert werden konnte, zeigte ein Vergleich zwischen resultierenden Beiwerten der Tacoma-Narrows-Bridge erhebliche Unterschiede der LES-Modellierung auf. Unter bestimmten Anstellwinkeln der Brücke verhält sich die virtuelle Strömung eher, als würde sie ein Rechteck statt einen sehr viel filigraneren Brückenquerschnitt umströmen. Im Hinblick auf den Widerstandskoeffizienten unterscheiden sich die modellierten Strömungen um den geneigten Querschnitt nicht, würde man den Querschnitt um den selben Winkel in die andere Richtung verdrehen. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen aus dem Windkanal. Bei der quantitativen Betrachtung der Vergleiche zeigen sich teilweise erhebliche Unterschiede zwischen den Beiwerten sowohl bei der Rechteckumströmung als auch bei der Umströmung der Tacoma-Narrows-Brigde.

Die RANS-Modellierung scheitert jeweils bereits bei der Reproduktion des Widerstandskoeffizienten der nicht gedrehten Körper.

Die Modellierung von turbulenten Strömungen ist nicht nur für die in dieser Arbeit dargestellten Szenarien problematisch. Auch die numerischen Ergebnisse der Kreiszyylinderumströmung bei hohen Reynoldszahlen aus der Literatur weichen teilweise von experimentellen Daten ab und unterscheiden sich sogar untereinander immens (vgl. [38] - [45]). Im Rahmen der Vorbereitung der in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse ist versucht worden den Widerstandskoeffizienten einer Kreiszyylinderumströmung bei einer Reynoldszahl von 10^6 durch eine entsprechende LES-Modellierung zu reproduzieren. Dieser Versuch ist gescheitert. Die Widerstandsbeiwerte unterschieden sich dabei sogar um eine Größenordnung (0,3 zu 1,3). Abgesehen von der mangelnden Qualität der Simulationsergebnisse bergen numerische Strömungssimulationen weitere Probleme, die die Benutzung der CFD-Simulation in der Praxis erschwert oder teilweise unmöglich macht.

Als erstes Problem ist der immense Rechenaufwand zu nennen. Für diese Arbeit wurden 135188,68 Prozessorstunden verbraucht. Für bestimmte einzelne LES-Simulationen rechneten 96 Prozessoren gleichzeitig über 60 Stunden lang. Ohne Zugriff auf das Rechensystem JUROPA wären diese Simulationen praktisch nicht umsetzbar gewesen. Ingenieurbüros haben in der Regel keine Möglichkeit Superrechner zu

nutzen. Ihnen bleiben nur die weniger aufwendigen RANS-Simulationen, die zwar auf Workstations (ca. 16 Prozessoren) ausführbar sind, deren Resultate aber wie gezeigt unbefriedigend sind. Die Umsetzung einiger, sehr weniger LES-Simulationen wären auf Workstations denkbar. Selbst zwei Simulationen eines Szenarios mit unterschiedlichem Diskretisierungsgrad sind jedoch wenig aussagekräftig. Erst eine Gitterstudie macht die Resultate belastbar. Zusätzlich sind Testläufe zu erstellen, die zeigen, ob gewünschte Randbedingungen oder weitere Parameter von der eingesetzten Software korrekt umgesetzt werden; ggf. auch, ob die Geometrie des Strömungsfelds sinnvoll gewählt wurde.

Die Anzahl der diskreten Stellen bestimmter fein diskretisierter Netze ist teilweise so hoch, dass die Erstellung dieser Netze die Benutzung eines entsprechend großen Arbeitsspeicher fordern. Gitternetze hoch aufgelöster Modellierungen der Strömung um das Modell der Tacoma-Narrows-Brigde waren zum Teil nicht mehr auf dem Laptop des Autors (6 GB RAM) zu generieren. Hier half ggf. der Supercomputer. Dies lässt erahnen, welche Datenmengen vom Arbeitsplatzrechner auf den Superrechner übertragen werden müssen. Die Datengröße der Dateien, in denen Netz, Randbedingungen und sonstige Rahmenbedingungen deklariert sind, bewegen sich teilweise im Bereich von über 500 MB. Mit der Uploadgeschwindigkeit eines herkömmlichen Internetanschlusses ist das ein Problem. Unter Verwendung eines Glasfasernetzes einer Universität ist die Datenübertragung jedoch kein Hindernis.

Das dritte Problem der numerischen Strömungsmechanik ist der Einfluss des Gitters auf Strömungen und daraus resultierende Ergebnisse. Nicht nur der Diskretisierungsgrad, sondern auch die Frage, welche Bereiche fein diskretisiert werden sollten, spielt hierbei eine Rolle. Da die numerische Lösung einer Strömung erst dann garantiert konvergiert, wenn die Gitterzellen bereits kleiner sind als die Kolmogorov-Länge, ist nicht bekannt, wie sich aus der Strömung resultierende Größen bei Verwendung von größeren Gitterzellen verhalten. Der Einsatz einer Gitterstudie gibt immerhin Auskunft über das Verhalten der Strömung in einem bestimmten Bereich von Diskretisierungsgraden.

Die Durchführung von numerischen Strömungssimulationen ist keineswegs trivial und verlangt Kompetenz in Mathematik und Physik. Die ausschließliche Anwendung von Software, die Strömungssimulationen erstellt, ist ohne ausreichendes Hintergrundwissen nicht empfehlenswert und in vielen Fällen gar nicht möglich. Unter anderem sind ein Grundwissen über turbulente Strömungen bzw. über Möglichkeiten diese zu modellieren sowie Kenntnisse über die CFL-Bedingung, die Reynoldszahl, Rand- und Anfangsbedingungen mindestens notwendig. Bevor das eigentliche Strömungsproblem angegangen werden kann, sind in jedem Fall Benchmarks zu erstellen, die zeigen, dass der Benutzer einer Software Rand- und Anfangsbedingungen und ggf. weitere Parameter korrekt übergeben hat. Weiterhin zeigt der Benchmark, ob ein virtuell generiertes Szenario der zu simulierenden realen Strömung in ausreichendem Maße entspricht. Bei erstmaligem Kontakt mit numerischer Strömungsmechanik ist die Bearbeitung eines Strömungsproblems innerhalb eines Monats kaum möglich.

14.2 Ausblick

Trotz der großen Anzahl an schwerwiegender Probleme ist die Möglichkeit, Kraftgrößenbeiwerte durch numerische Simulationen zu bestimmen, nicht abzuschreiben. Es existieren viele weitere RANS- und LES-Modelle, die in dieser Arbeit nicht untersucht wurden, die bei entsprechend höherem Aufwand ggf. bessere Ergebnisse erzielt haben könnten. Weiterhin werden kontinuierlich neue Modelle entwickelt oder

bestehende Modelle verbessert. Durch die stetige Verbesserung der Rechenleistung wird es mit großer Wahrscheinlichkeit in näherer Zukunft nicht mehr notwendig sein, Vereinfachungen wie beispielsweise die Vernachlässigung von Querschotten und Horizontalverbänden der Tacoma-Narrows-Brigde zu treffen. Insbesondere die Möglichkeit, DNS-Simulationen durchführen zu können, verspricht Verbesserung der Ergebnisse. In der Literatur stimmen Resultate einer DNS-Modellierung sehr gut mit experimentell bestimmten Daten überein [40], [45]. In bestimmten Fällen hat sich die DNS-Simulation sogar als genauer herausgestellt, da sie u. a. nicht von Ungenauigkeiten von Messinstrumenten abhängig ist. Zusätzlich gibt sie Aufschluss über Strömungen, die in vielen Fällen experimentell nur in einem beschränkten Rahmen bzw. gar nicht untersucht werden können. Dies gilt selbstverständlich auch für RANS- und LES-Modellierungen, wobei die Ergebnisse dieser, wie sich in dieser Arbeit gezeigt hat, in Frage gestellt werden müssen. Auch um die Phänomene der Turbulenz zu untersuchen, hat die DNS-Modellierung sich als hilfreich erwiesen.

Auf dem heutigen Stand ist eine DNS-Simulation einer Strömung auf einen Körper bei einer hohen Reynoldszahl aufgrund des Rechen- und Speicheraufwands noch bei Weitem nicht realisierbar. Doch DNS-Modellierungen könnten schon in näherer Zukunft ein zuverlässiges Werkzeug für die Lösung eines großen Teils der Strömungsprobleme sein.

Literaturverzeichnis

- [1] LAURIEN, ECKART; OERTEL, HERBERT (2013) *Numerische Strömungsmechanik - Grundgleichungen und Modelle - Lösungsmethoden - Qualität und Genauigkeit*, Springer Verlag.
- [2] SCHWARZE, RÜDIGER (2013) *CFD-Modellierung - Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen*, Springer Verlag.
- [3] FERZIGER, JOEL H.; PERIĆ, MILOVAN (2008) *Numerische Strömungsmechanik*, Springer Verlag.
- [4] ARNOLD, LUKAS (2014) *Vorlesungsskript Brandsimulationen*, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [5] LECHELER, STEFAN (2014) *Numerische Strömungsberechnung - Schneller Einstieg durch anschauliche Beispiele mit ANSYS 15.0*, Springer Verlag.
- [6] ARCILLA, A.S., HÄUSER, J., EISEMAN, P.R., THOMPSON, J.F. (EDS.) (1991) *Numerical grid generation in computational fluid dynamics and related fields.*, North-Holland, Amsterdam.
- [7] THOMPSON, M.C., FERZIGER, J.H. (1989) *A multigrid adaptive method for incompressible flows.*, J. Comput. Phys., 82, 94–121.
- [8] ODEN, J.T. (1972) *Finite elements of non-linear continua.*, McGraw-Hill, New York.
- [9] BAKER, A.J. (1983) *Finite element computational fluid mechanics.*, McGraw-Hill, New York.
- [10] BARTEL, A. ET AL. (2013) *Vorlesungsskript Höhere mathematische Verfahren*, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [11] OERTEL, H. JR; BÖHLE, MARTIN; REVIOL, THOMAS (2012) *Übungsbuch Strömungsmechanik - Grundlagen, Grundgleichungen, Analytische und Numerische Lösungsmethoden*, Springer Verlag.
- [12] ARNOLD, L. (2014) *Vorlesungsskript Ingenieurinformatik*, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [13] KÖCKLER, NORBERT (2012) *Mehrgittermethoden - Ein Lehr- und Übungsbuch*, Springer Spektrum Verlag.
- [14] BARTEL, A. ET AL. (2013) *Vorlesungsskript Mathematik 1*, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [15] RUSCHEWEYH, HANS (1982) *Dynamische Windwirkung an Bauwerken. Bd.1. Grundlagen*, Bauverlag.

- [16] EUSANI, RENATO (2005) *Zur numerischen Zeitbereichssimulation der aeroelastischen Instabilität bei Seilbrücken*, Dissertation, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [17] KUNIK, CLAUS (2012) *CFD-Simulationen turbulenter konvektiver Strömungen bei überkritischen Drücken*, Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Institut für Technologie, Karlsruhe.
- [18] HENDERSON, RONALD D. (1995) *Details of the drag curve near the onset of vortex shedding*, Physics of Fluids (1994-present) 7, 2102 (1995); doi: 10.1063/1.868459.
- [20] PATEL, V. A. (1977) *Karman Vortex Street behind a Circular Cylinder by the Series Truncation Method*, Journal of computational physics 28, 14-42 (1978).
- [21] CAO, HONGJIAN; WAN, DECHENG (2010) *Application of OpenFOAM to Simulate Three-Dimensional Flows past a Single and Two Tandem Circular Cylinders*, Proceedings of the Twentieth (2010) International Offshore and Polar Engineering Conference Beijing, China, June 20 - 25, 2010.
- [22] SEN, SUBHANKAR; MITTAL, SANJAY; BISWAS, GAUTAM (2010) *Numerical Simulation of Steady Flow Past a Circular Cylinder*, Proceedings 37th National & 4th International Conference on Fluid Mechanics Fluid Power December 16-18, 2010, IIT Madras, Chennai, India.
- [23] BOLLÓ, BETTI; JANIGA, GÁBOR; BARANYI, LÁSZLÓ (2012) *Three-dimensional computations for low-reynoldsnumber flows past a cylinder*, Publications of the XXVI. microCAD International Scientific Conference, University of Miskole, Hungary.
- [24] RAJANI, B. N.; KANDASAMY, A.; MAJUMDAR, SEKHAR (2008) *Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder*, Applied Mathematical Modelling 33 (2009) 1228–1247.
- [25] SHEARD G. J.; HOURIGAN, K.; THOMPSON, M. C. (2004) *Computations of the drag coefficients for low-Reynolds-number flow past rings*, J. Fluid Mech. (2005), vol. 526, pp. 257–275.
- [26] ENGELBRETH, KNUT INGE (2011) *Viscous flow around a circular cylinder near a plane wall*, Master Thesis, Department of Marine Technology, NTNU - Trondheim.
- [27] LYSENKO, DMITRY; ERTESVÅAG, IVAR S.; RIAN, KJELL ERIK (2013) *urbulent bluff body flows modeling using OpenFOAM technology*, Computers & Fluids 80 (2013): 408-422.
- [28] WILLIAMSON, C. H. K. (1988) *Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers*, J. Fluid Mech. (1989), vol. 206, pp. 579 - 627.
- [29] THIESEMANN, LYDIA (2008) *Zur Ermittlung von Flatterderivativa aus Versuchen und mittels numerischer Strömungsmechanik*, Dissertation, Technische Universität Hamburg-Harburg.
- [30] LIAW, KAI FAN *Simulation of Flow around Bluff Bodies and Bridge Deck Sections using CFD*, Dissertation, School of Civil Engineering, University of Nottingham.
- [31] NEUHAUS, CHRISTIAN (2010) *Zur Identifikation selbsterregter aeroelastischer Kräfte im Zeitbereich*, Dissertation, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.

- [32] TU DELFT (2014)
URL: [HTTP://TA.TWI.TUDELFT.NL/NW/USERS/VUIK/INFORMATION/FIG06.GIF](http://ta.twi.tuelft.nl/nw/users/vuik/information/fig06.gif), Abfragedatum: 09.10.2014.
- [33] MATVEICHEV, ALEXEI (2014) *OpenFOAM, residuals, and vortex street*, URL: [HTTP://MATVEICHEV.BLOGSPOT.DE/2014/03/OPENFOAM-RESIDUALS-AND-VORTEX-STREET.HTML](http://matveichev.blogspot.de/2014/03/openfoam-residuals-and-vortex-street.html), Abfragedatum: 09.10.2014.
- [34] LUFG AERODYNAMIK UND STRÖMUNGSMECHANIK (2014) URL: [HTTP://WWW.RUHR-UNI-BOCHUM.DE/AIB/](http://www.ruhr-uni-bochum.de/aib/), Abfragedatum: 08.10.2014.
- [35] NASA (2014) *Visible Earth*,
URL: [HTTP://VISIBLEEARTH.NASA.GOV/VIEW.PHP?ID=68992](http://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=68992), Abfragedatum: 09.10.2014.
- [36] NEBEL, BERND (2010) *Der Einsturz der Tacoma-Narrows-Brigde*, URL: [HTTP://WWW.BERND-NEBEL.DE/BRUECKEN/](http://www.bernd-nebel.de/bruecken/), Abfragedatum: 09.10.2014.
- [37] GRAHAMUK (2006) *Kelvin-Helmholtz-Instabilität*, URL: [HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/KELVIN%E2%80%99S_INSTABILITÄT](http://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin%E2%80%99s_instability), Abfragedatum: 09.10.2014.
- [38] BREUER, M. (1998) *Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: Numerical Aspects*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 28: 1281 – 1302 (1998).
- [39] RODI, W. (1997) *Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 69-71 (1997) 55-75.
- [40] TREMBLAY, FREDERIC *Direct and large-eddy simulation of ow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers*, Dissertation, Fachgebiet Strömungsmechanik, Technische Universität München.
- [41] DELANY, NOEL K.; SORENSEN, NORMAN E. (1953) *Low-speed drag of cylinders of various shapes*, Technical Note 3038, National Advisory Committee For Aeronautics.
- [42] CATALANO, P.; WANG, MENG; IACCARINO, GIANLUCA, MOIN, PARVIZ (2002) *Numerical simulation of the flow around a circular cylinder at high Reynolds numbers*, International Journal of Heat and Fluid Flow 24 (2003) 463–469.
- [43] KARABELAS, S. J. (2010) *Large Eddy Simulation of high-Reynolds number flow past a rotating cylinder*, International Journal of Heat and Fluid Flow 31 (2010) 518–527.
- [44] ROSHKO, ANATOL (1960) *Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number*, Journal of Fluid Mechanics / Volume 10 / Issue 03 / May 1961, pp 345- 356.
- [45] WU, WEI (2011) *Two-dimensional RANS simulation of flow induced motion of circular cylinder with passive turbulence control*, Dissertation, Naval Architecture and Marine Engineering, University of Michigan.

- [46] SHIMADA, K.; ISHIHARA, T. (1998) *Application of a modified $k - \epsilon$ model to the prediction of aerodynamic characteristics of rectangular cross-section cylinders*, Journal of Fluids and Structures (2002) 16(4), 465 - 485.
- [47] YING, XUYONG; XU, FUYOU; ZHANG, ZHE (2012) *Numerical simulation and visualization of flow around rectangular bluff bodies*, The Seventh International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications (BBAA7) Shanghai, China; September 2-6, 2012.
- [48] TAMURA, T.; ITO, Y. (1996) *Aerodynamic characteristics and flow structures around a rectangular cylinder with a section of various depth/height ratios*, Journal of Structural and Construction of Engineering (Transactions of Architectural Institute of Japan), 486 (1996) 153-162.
- [49] BERGMANN, DETLEF (2004) *Experimentelle Ermittlung der instationären aerodynamischen Eigenschaften von Brückenprofilen im Wasserkanal*, Dissertation, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie, Universität Stuttgart.
- [50] BRUNO, LUCA; FRANSOS, DAVIDE; COSTE, NICOLAS; BOSCO, ARIANNA (2008) *3D flow around a rectangular cylinder: A computational study*, BBAA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics & Applications Milano, Italy, July, 20-24 2008.
- [51] ROESLER, SEBASTIAN (2008) *Entwicklung eines Berechnungswerkzeugs zum Nachweis der aeroelastischen Stabilität weitgespannter Brücken*, Diplomarbeit, Abt. Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- [52] BILLAH, K. YUSUF; ROBERT H. SCANLAN (1991) *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks* Am. J. Phys 59.2 (1991): 118-124.
-

Teil VI

Anhang

Anhang A

Kraftkoeffizienten der numerischen Modellierung

A.1 Umströmung eines Rechtecks mit dem Verhältnis von Breite zu Höhe von 8:1

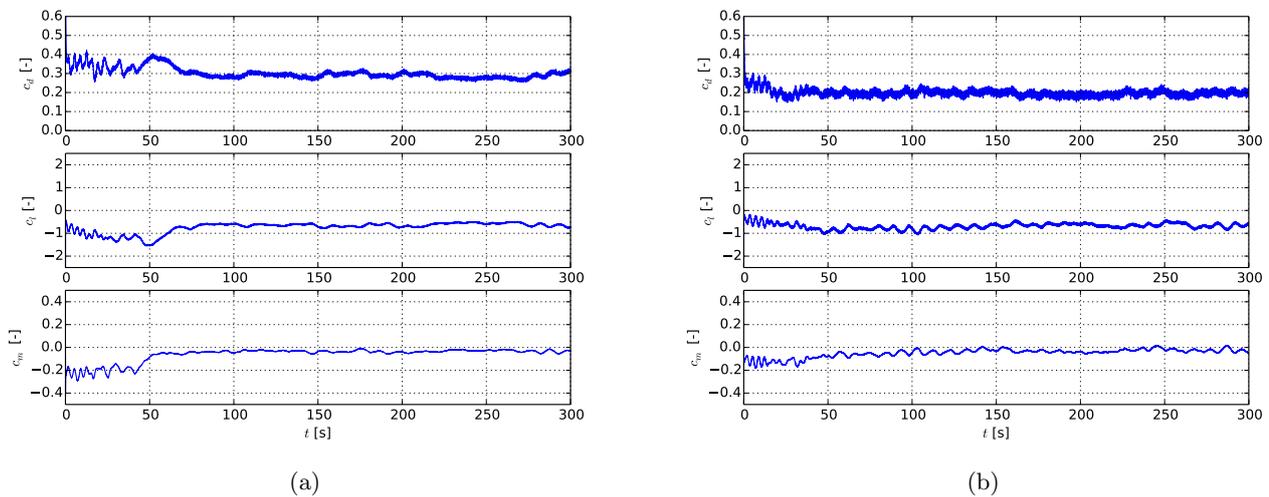
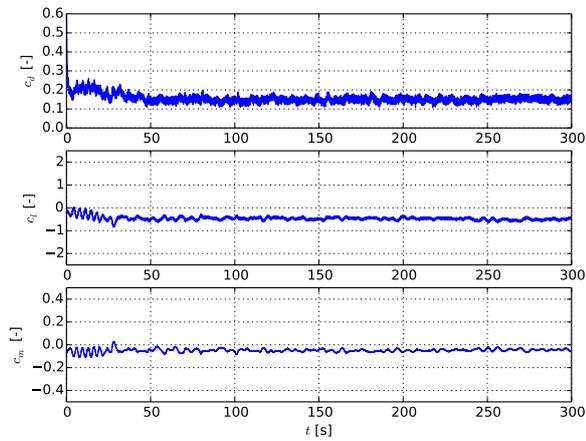
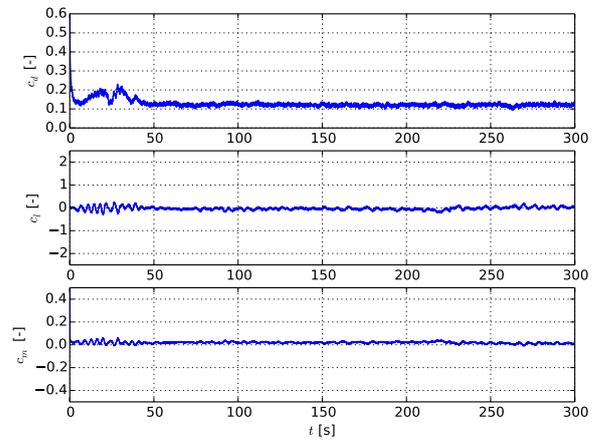


Abbildung A.1: Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um -10°
b) Neigung um -5° .

A.2 Umströmung der Tacoma-Narrows-Brücke

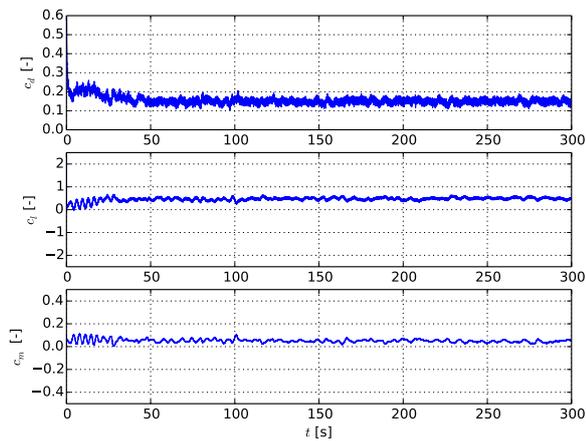


(a)

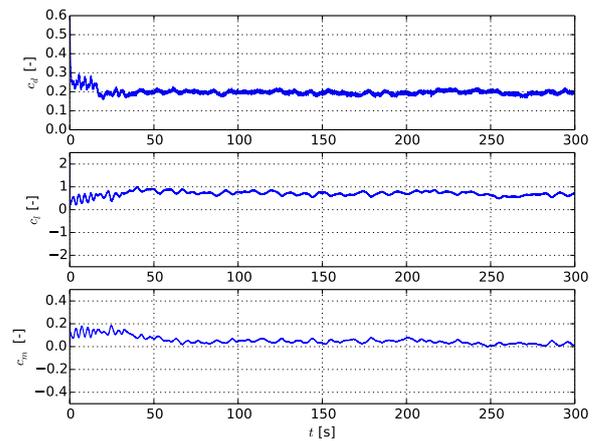


(b)

Abbildung A.2: Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um $-2,5^\circ$
b) Neigung um 0° .



(a)



(b)

Abbildung A.3: Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. a) Neigung um $2,5^\circ$
b) Neigung um 5° .

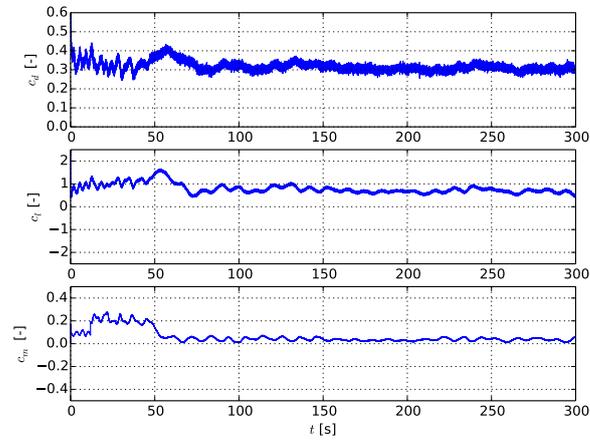
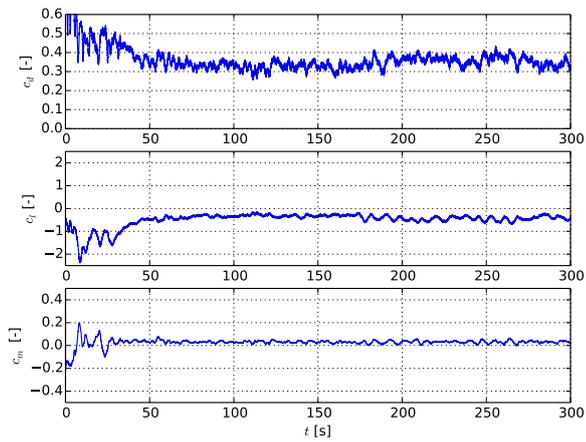
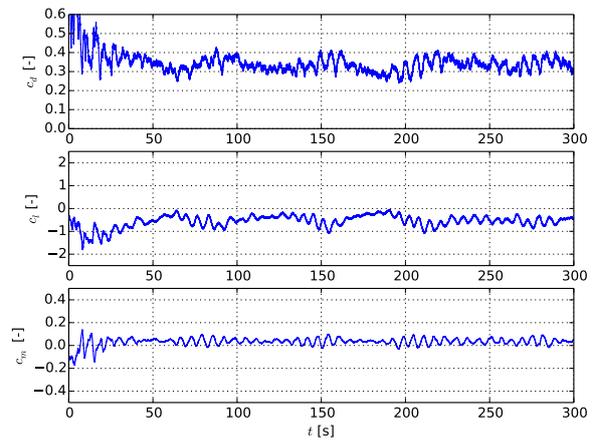


Abbildung A.4: Kraftkoeffizienten des geneigten Rechtecks. Neigung um 10° .

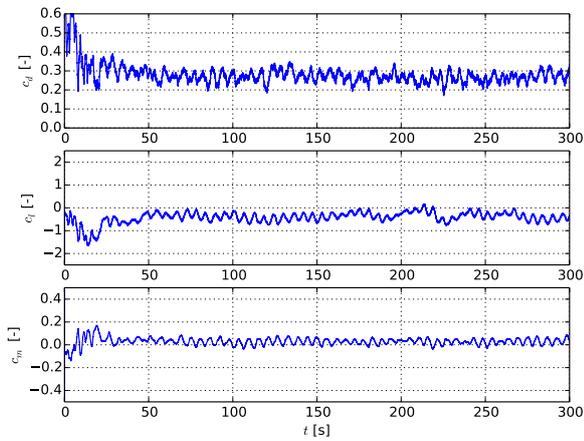


(a)

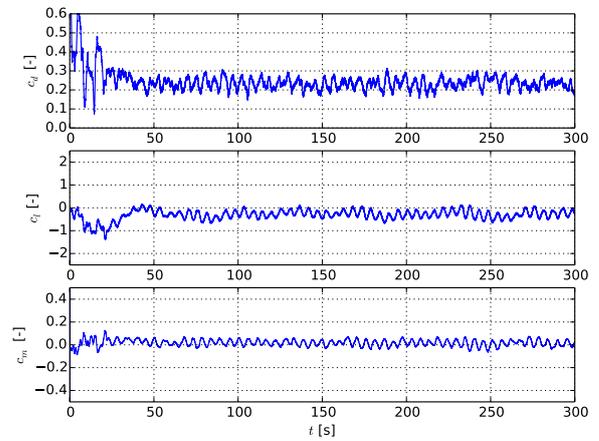


(b)

Abbildung A.5: Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um -10°
b) Neigung um $-7,5^\circ$.

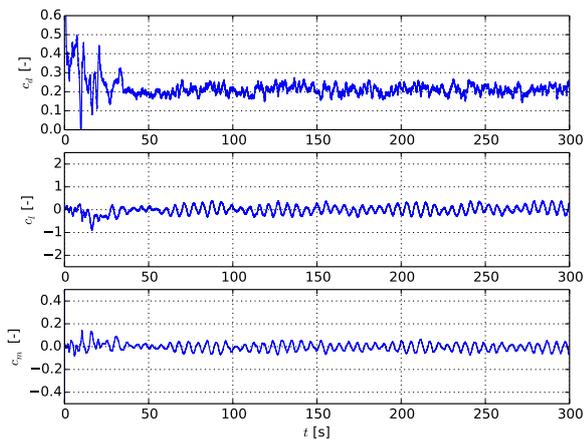


(a)

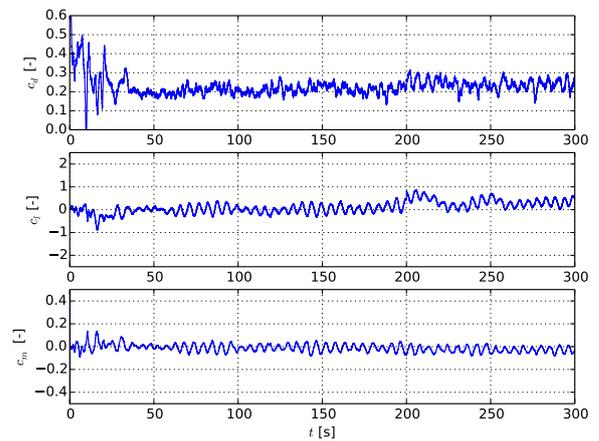


(b)

Abbildung A.6: Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um -5°
b) Neigung um $-2,5^\circ$.



(a)



(b)

Abbildung A.7: Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 0°
b) Neigung um $2,5^\circ$.

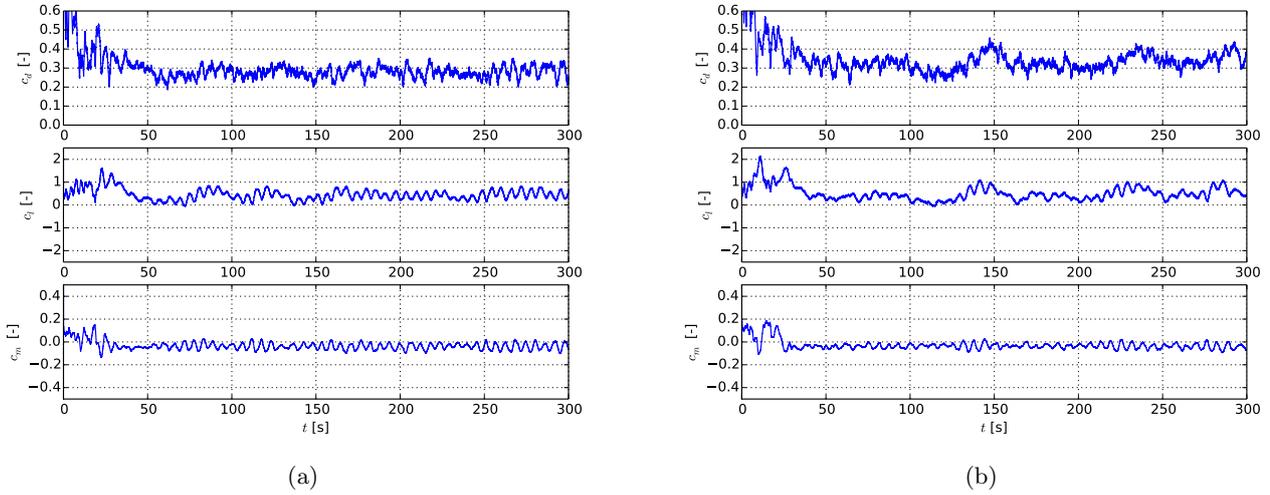


Abbildung A.8: Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. a) Neigung um 5°
 b) Neigung um $7,5^\circ$.

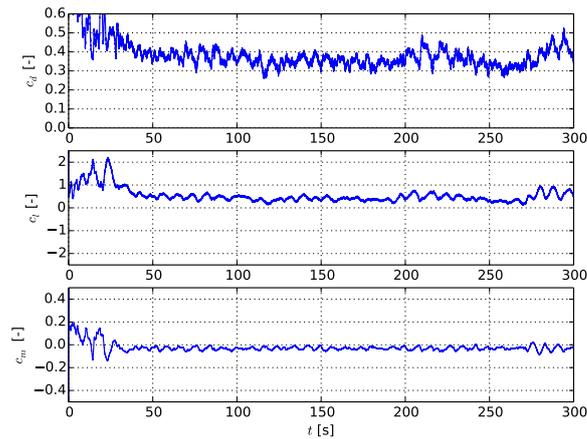


Abbildung A.9: Kraftkoeffizienten des geneigten Brückenquerschnitts. Neigung um 10° .

Anhang B

OpenFOAM-Inputdateien

B.1 Benchmark - Laminare Umströmung eines Kreiszyinders

Listing B.1: controlDict

```
/*-----* C++ *-----*\
|=====|
|
| \\ / Field | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
| \\ / Operation | Version: 2.3.0
|
| \\ / And | Web: www.OpenFOAM.org
|
| \\ / Manipulation |
|
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       controlDict;
}
// *****

application    icoFoam;

startFrom      latestTime;

startTime      0;
```

```
stopAt          endTime;

endTime         100;

deltaT          0.025;

writeControl    timeStep;

writeInterval   100;

purgeWrite      0;

writeFormat     ascii;

writePrecision  6;

writeCompression off;

timeFormat      general;

timePrecision   6;

runTimeModifiable true;

functions

{

    #include "forceCoeffs"

}

// ***** //
```

Listing B.2: fvSchemes

```

/*-----* C++ *-----*\
|=====|
|
| \ \ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
| \ \ / O p e r a t i o n | Version: 2.3.0
|
| \ \ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org
|
| \ \ / M a n i p u l a t i o n |
|
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       fvSchemes;
}
// *****

ddtSchemes
{
    default      Euler;
}

gradSchemes
{
    default      Gauss linear;
    grad(p)      Gauss linear;
}

divSchemes
{
    default      none;
    div(phi,U)   Gauss linear;
}

laplacianSchemes

```

```
{
    default      Gauss linear orthogonal;
}
```

```
interpolationSchemes
```

```
{
    default      linear;
}
```

```
snGradSchemes
```

```
{
    default      orthogonal;
}
```

```
fluxRequired
```

```
{
    default      no;
    p            ;
}
```

```
// ***** //
```

Listing B.3: fvSolution

```
/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
|      / Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|      / Operation  | Version: 2.3.0
|      / And        | Web:      www.OpenFOAM.org
|      // Manipulation |
|
|-----*-----*\
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
```



```

|  \ \    /   O p e r a t i o n      |  V e r s i o n :   2 . 3 . 0
|
|  \ \    /   A n d                   |  W e b :           w w w . O p e n F O A M . o r g
|
|   \ \ /    M a n i p u l a t i o n   |
|
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        polyBoundaryMesh;
    location     "constant/polyMesh";
    object       boundary;
}
// * * * * *

5
(
    FrontBack
    {
        type          empty;
        physicalType  empty;
        nFaces        29040;
        startFace     28742;
    }
    UpDown
    {
        type          wall;
        physicalType  wall;
        nFaces        292;
        startFace     57782;
    }
    Inlet
    {
        type          patch;
        physicalType  patch;
        nFaces        66;
        startFace     58074;
    }
    Cylinder

```

```

    {
        type            wall;
        physicalType    wall;
        nFaces          142;
        startFace       58140;
    }
    Outlet
    {
        type            patch;
        physicalType    patch;
        nFaces          96;
        startFace       58282;
    }
)

```

// ***** //

Listing B.5: transportProperties

```

/*-----* C++ *-----*\
|=====|
| \ \ / F i e l d | O p e n F O A M : T h e O p e n S o u r c e C F D T o o l b o x
| \ \ / O p e r a t i o n | V e r s i o n : 2 . 3 . 0
| \ \ / A n d | W e b : w w w . O p e n F O A M . o r g
| \ \ / M a n i p u l a t i o n |
|-----*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       transportProperties;
}
// ***** //

nu          nu [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 1e-04;

```

```
// ***** //
```

Listing B.6: fvSchemes

```
/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
|      / Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|      / Operation  | Version: 2.3.0
|      / And        | Web:      www.OpenFOAM.org
|      // Manipulation |
|
|-----*\
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        volVectorField;
    object       U;
}
// ***** //
```

```
dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];
```

```
internalField   uniform (0.1 0 0);
```

```
boundaryField
```

```
{
    FrontBack
    {
        type          empty;
    }
    Cylinder
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform (0 0 0);
    }
}
```



```

dimensions      [0 2 -2 0 0 0 0];

internalField   uniform 0;

boundaryField
{
    FrontBack
    {
        type      empty;
    }
    Cylinder
    {
        type      zeroGradient;
    }
    UpDown
    {
        type      zeroGradient;
    }
    Inlet
    {
        type      zeroGradient;
    }
    Outlet
    {
        type      fixedValue;
        value     uniform 0;
    }
}
// ***** //

```

B.2 Umströmung des Rechtecks und der Tacoma-Narrows-Brigde

Listing B.8: controlDict

```

/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
|

```

```

| \ \      /   F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
| \ \      /   O p e r a t i o n   | Version:   2.3.0
|
| \ \      /   A n d                | Web:       www.OpenFOAM.org
|
| \ \ /      M a n i p u l a t i o n |
|
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       controlDict;
}
// *****

application     pisoFoam;

startFrom       startTime;

startTime       0;

stopAt          endTime;

endTime         100;

deltaT          0.005;

writeControl    timeStep;

writeInterval   500;

purgeWrite      0;

writeFormat     ascii;

writePrecision  6;

```

```
writeCompression off;

timeFormat      general;

timePrecision   6;

runTimeModifiable true;

functions
(
forceCoeffs
{
type forceCoeffs;
functionObjectLibs ("libforces.so");
patches (Cylinder);
pName p;
UName U;
rhoName rhoInf;
rhoInf 1.2041;
CofR (0 0 0);
liftDir (0 1 0);
dragDir (1 0 0);
pitchAxis (0 0 1);
magUInf 0.125;//Free stream velocity
lRef 2; // Diameter of cylinder?
Aref 0.4 ; //Aref
outputControl timeStep;
outputInterval 1;
}
);

// ***** //
```

Listing B.9: fvSchemes

```
/*-----* C++ *-----*\
|=====|
|
| \\      / F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
```



```

}

interpolationSchemes
{
    default          linear;
}

snGradSchemes
{
    default          corrected;
}

fluxRequired
{
    default          no;
    p                ;
}

```

// ***** //

Listing B.10: fvSolution

```

/*-----* C++ *-----*\
|=====|
|      / Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|      / Operation  | Version: 2.3.0
|      / And        | Web:      www.OpenFOAM.org
|      // Manipulation |
|-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       fvSolution;
}

```


// ***** //


```

        type            patch;
        physicalType    patch;
        nFaces          3888;
        startFace       3309612;
    }
    Inlet
    {
        type            patch;
        physicalType    patch;
        nFaces          3888;
        startFace       3313500;
    }
    Cylinder
    {
        type            patch;
        physicalType    patch;
        nFaces          8304;
        startFace       3317388;
    }
)

// ***** //

```

Listing B.12: boundary (RANS)

```

/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
| \ \   / F i e l d   | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \ \   / O p e r a t i o n   | Version: 2.3.0
| \ \   / A n d   | Web: www.OpenFOAM.org
| \ \ / M a n i p u l a t i o n   |
|
\*-----*/
FoamFile
{
    version    2.0;
    format     ascii;
    class      polyBoundaryMesh;
}

```



```

    }
)

// *****

```

Listing B.13: transportProperties

```

/*-----* C++ -----*\
|=====|
|
| \ \ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
| \ \ / O p e r a t i o n | Version: 2.3.0
|
| \ \ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org
|
| \ \ / M a n i p u l a t i o n |
|
/*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       transportProperties;
}
// *****

transportModel  Newtonian;

nu              nu [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 1e-06;

// *****

```

Listing B.14: U

```

/*-----* C++ -----*\
|=====|
|

```

```

| \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|
| \\      / O p e r a t i o n      | Version: 2.3.0
|
| \\      / A n d      | Web:      www.OpenFOAM.org
|
|  \\/    M a n i p u l a t i o n      |
|
|*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        volVectorField;
    object       U;
}
// *****

dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField   uniform (0.125 0 0);

boundaryField
{
    FrontBack
    {
        type      slip;
    }
    UpDown
    {
        type      slip;
    }
    Cylinder
    {
        type      fixedValue;
        value     uniform (0 0 0);
    }
    Inlet
    {
        type      turbulentInlet;
        referenceField uniform (0.125 0 0);
    }
}

```

```

        fluctuationScale (0.005 0.005 0.0);
        value             uniform (0.125 0 0);
    }
    Outlet
    {
        type             inletOutlet;
        inletValue       uniform (0 0 0);
        value            uniform (0 0 0);
    }
}

```

// ***** //

Listing B.15: p

```

/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
|      / Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|      / Operation  | Version: 2.3.0
|      / And        | Web:      www.OpenFOAM.org
|      // Manipulation |
|
/*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        volScalarField;
    object       p;
}
// ***** //

```

```

dimensions      [0 2 -2 0 0 0 0];

```

```

internalField   uniform 0;

```

```

boundaryField
{

```

```

FrontBack
{
    type          zeroGradient;
}
UpDown
{
    type          zeroGradient;
}
Cylinder
{
    type          zeroGradient;
}
Inlet
{
    type          zeroGradient;
}
Outlet
{
    type          fixedValue;
    value         uniform 0;
}
}
// *****

```

Listing B.16: nuSgs (LES)

```

/*-----* C++ *-----*\
|=====|
| \ \ / F i e l d | O p e n F O A M : T h e O p e n S o u r c e C F D T o o l b o x
| \ \ / O p e r a t i o n | V e r s i o n : 2 . 3 . 0
| \ \ / A n d | W e b : w w w . O p e n F O A M . o r g
| \ \ / M a n i p u l a t i o n |
|-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
}

```



```

| ===== |
| |
| \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| |
| \\      / O p e r a t i o n      | Version: 2.1.1
| |
| \\      / A n d      | Web: www.OpenFOAM.org
| |
| \\      / M a n i p u l a t i o n      |
| |
|_*-----*|
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        volSymmTensorField;
    object       R;
}
// *****

dimensions      [0 2 -2 0 0 0 0];

internalField   uniform (3.6e-05 0 0 1.8e-05 0 1.8e-05);

boundaryField
{
    Inlet
    {
        type      fixedValue;
        value     uniform (3.6e-05 0 0 1.8e-05 0 1.8e-05);
    }

    Outlet
    {
        type      zeroGradient;
    }

    FrontBack
    {
        type      kqRWallFunction;
        value     uniform ( 0 0 0 0 0 0 );
    }
}

```

```

    }

    UpDown
    {
        type          kqRWallFunction;
        value         uniform ( 0 0 0 0 0 0 );
    }
    Cylinder
    {
        type          kqRWallFunction;
        value         uniform ( 0 0 0 0 0 0 );
    }
}

```

// ***** //

Listing B.18: RASProperties

```

/*-----* C++ -*-----*\
|=====|
| \ \ / F i e l d | O p e n F O A M : T h e O p e n S o u r c e C F D T o o l b o x
| \ \ / O p e r a t i o n | V e r s i o n : 2 . 3 . 0
| \ \ / A n d | W e b : w w w . O p e n F O A M . o r g
| \ \ / M a n i p u l a t i o n |
|
/*-----*
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       RASProperties;
}
// ***** //

```

```

RASModel      LRR;

```



```
PrandtlCoeffs
{
    delta            cubeRootVol;
    cubeRootVolCoeffs
    {
        deltaCoeff    1;
    }

    smoothCoeffs
    {
        delta            cubeRootVol;
        cubeRootVolCoeffs
        {
            deltaCoeff    1;
        }

        maxDeltaRatio    1.1;
    }

    Cdelta            0.158;
}
```

```
vanDriestCoeffs
{
    delta            cubeRootVol;
    cubeRootVolCoeffs
    {
        deltaCoeff    1;
    }

    smoothCoeffs
    {
        delta            cubeRootVol;
        cubeRootVolCoeffs
        {
            deltaCoeff    1;
        }

        maxDeltaRatio    1.1;
    }
}
```

```
Aplus          26;  
Cdelta         0.158;  
}
```

```
smoothCoeffs  
{  
  delta         cubeRootVol;  
  cubeRootVolCoeffs  
  {  
    deltaCoeff   1;  
  }  
  
  maxDeltaRatio 1.1;  
}
```

```
// ***** //
```


Anhang C

Das im Windkanal eingesetzte Modell der Tacoma-Narrows-Bridge

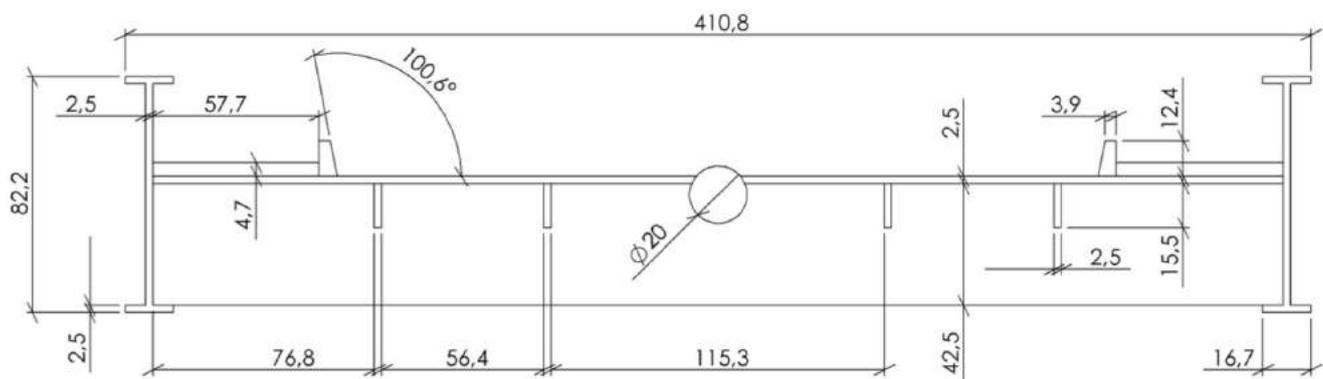


Abbildung C.1: Das im Windkanal eingesetzte Modell der Tacoma-Narrows-Bridge. Angaben in [mm].
Quelle: [31].